

Commande supervisée des automates $(\max,+)$

Jan KOMENDA¹, Sébastien LAHAYE², Jean-Louis BOIMOND²

¹ Institute of Mathematics - Brno Branch, Czech Academy of Sciences
Zizkova 22, 616 62 Brno, Czech Republic
komenda@ipm.cz

²Laboratoire d'Ingénierie des Systèmes Automatisés,
62, Avenue Notre Dame du Lac, 49000 Angers, France
[sebastien.lahaye, jean-louis.boimond]@istia.univ-angers.fr

Résumé— Dans ce papier, on étudie la commande des automates $(\max,+)$. La commande proposée consiste à réaliser la composition parallèle de l'automate $(\max,+)$ du contrôleur (superviseur) avec celui du système en présence d'événements incontrôlables. Cette approche présente l'avantage de traiter à la fois des aspects logiques et temporels de la commande des systèmes dynamiques à événements discrets considérés. Un superviseur le plus permissif et répondant à des exigences de fonctionnement en "juste-à-temps" a été établi dans des travaux précédents et est rappelé ici. Une contribution de ce papier consiste en la synthèse d'un superviseur le moins permissif et en "juste-après". Un deuxième résultat nouveau est de spécifier la méthode pour obtenir un superviseur de comportement non-décroissant.

Mots-clés— Automate $(\max,+)$, commande supervisée, système $(\max,+)$ linéaire.

I. INTRODUCTION

Les techniques de commande supervisée des systèmes à événements discrets, proposées par Ramadge et Wonham [14], s'intéressent uniquement à des aspects logiques. La nécessité de considérer des contraintes temporelles a conduit à étendre ces techniques au cas de systèmes temporisés. On peut notamment retenir une extension aux cas de systèmes temps-réel, basée sur des abstractions d'automates temporisés en automates booléens (logiques), appelés également automates des régions [15].

Une classe de systèmes à événements discrets temporisés peut aussi être modélisée par des automates $(\max,+)$ [4], [5]. Une méthodologie de commande des automates $(\max,+)$ basée sur une approche comportementale a été développée dans [8], [9], [10]. Elle porte sur la composition parallèle du contrôleur avec le système, les deux étant modélisés par des automates $(\max,+)$. Cette composition parallèle n'est pas la composition synchrone, mais spécifie l'interaction du contrôleur avec le système en présence d'événements incontrôlables. Le contrôle optimal (le plus permissif) des automates $(\max,+)$ vis-à-vis du critère juste-à-temps a été proposé et est rappelé ici.

Dans la continuité de ces travaux, nous proposons ici deux résultats nouveaux. On montre tout d'abord comment synthétiser un superviseur optimal vis-à-vis du critère dual, à savoir le moins permissif et en "juste-après". Ensuite, nous spécifions la méthode pour la synthèse d'un contrôleur, dont la série est non décroissante sur son support. Cela permet de fournir une solution de commande réaliste dans le sens où le contrôleur n'impose alors que

des délais à valeur positive.

Le papier est organisé comme suit. Dans la section suivante, on rappelle les outils algébriques importants pour notre approche. La Section 3 est dédiée aux automates $(\max,+)$ et à leur composition parallèle. Nous présentons dans la Section 4 les résultats sur la commande des automates $(\max,+)$.

II. PRÉLIMINAIRES

Dans cette section, on fait un rappel succinct sur les semi-anneaux idempotents (voir [1], [6] pour des présentations exhaustives) et des résultats utiles pour la suite sur les séries formelles sont données.

Un *dioïde* est un *semi-anneau* dans lequel la somme, notée \oplus , est idempotente. La somme (resp. le produit, noté \otimes) admet un élément neutre noté ε (resp. e). Un dioïde est dit *complet* s'il est fermé pour les sommes infinies et si le produit distribue sur les sommes infinies. La somme de tous ses éléments est généralement noté \top (pour "Top").

Exemple 1: L'ensemble $\mathbb{R}_{\max} = (\mathbb{R} \cup \{-\infty\})$ muni de l'opérateur \max comme somme et de l'addition usuelle comme produit est un dioïde (non complet). Si on y ajoute $\top = +\infty$ (avec la convention $\top \otimes \varepsilon = +\infty + (-\infty) = -\infty = \varepsilon$), le dioïde est complet et est noté $\overline{\mathbb{R}}_{\max}$.

En raison de l'idempotence de la somme, un dioïde est muni d'une *relation d'ordre partielle*, notée \preceq , définie par l'équivalence : $a \preceq b \Leftrightarrow a \oplus b = b$. Un dioïde complet a une structure de *treillis complet*, c'est-à-dire que deux éléments a et b ont toujours une *plus petite borne supérieure*, à savoir $a \oplus b$, et une *plus grande borne inférieure* notée $a \wedge b = \bigoplus_{x \preceq a, x \preceq b} x$ dans le dioïde.

Les opérations matricielles sont définies comme dans l'algèbre linéaire classique. La matrice identité de $\overline{\mathbb{R}}_{\max}^{n \times n}$ est notée E .

Dans un dioïde complet, on définit l'étoile de Kleene selon la formule

$$a^* = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} a^n,$$

où par convention $a^0 = e$ et $a^n = a^{n-1} \otimes a$ pour tout a .

La *théorie de la résiduation* (voir [3] pour une présentation exhaustive et [1, §4.4] pour sa spécification aux dioïdes) permet la définition de 'pseudo-inverses' d'applications isotones (f est isotone si $a \preceq b \Rightarrow f(a) \preceq f(b)$). Une application isotone $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ est dite *résiduable* (resp. *dualement résiduable*) si $\forall y \in \mathcal{C}$, la plus petite borne

supérieure (resp. la plus grande borne inférieure) de l'ensemble $\{x \in \mathcal{D} \mid f(x) \preceq y\}$ (resp. $\{x \in \mathcal{D} \mid f(x) \succeq y\}$) existe et appartient à cet ensemble.

Définition 1: [3] Soient \mathcal{D} et \mathcal{C} deux ensembles ordonnés (dont les dioïdes sont des exemples particuliers) et notons $Id_{\mathcal{C}}$ et $Id_{\mathcal{D}}$ les applications identité sur \mathcal{C} et \mathcal{D} respectivement. Une application isotone $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ est dite

- résiduable s'il existe une application isotone $h : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ telle que

$$f \circ h \preceq Id_{\mathcal{C}} \text{ et } h \circ f \succeq Id_{\mathcal{D}}. \quad (1)$$

L'application h , appelée *résiduée* de f , est unique et est notée f^\sharp .

- dualement résiduable s'il existe une application isotone $h' : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ telle que

$$f \circ h' \succeq Id_{\mathcal{C}} \text{ et } h' \circ f \preceq Id_{\mathcal{D}}. \quad (2)$$

L'application h' , appelée *résiduée duale* de f , est unique et est notée f^\flat .

Exemple 2: L'application isotone $R_a : x \mapsto x \otimes a$ dans un dioïde complet \mathcal{D} est résiduable. La plus grande solution de $x \otimes a \preceq b$ est égale à $R_a^\sharp(b)$, aussi notée $b \not\# a$.

Théorème 1: [1, §4.4.4] Si $g : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ et $f : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{B}$ sont des applications résiduables (resp. dualement résiduables), alors $f \circ g : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{B}$ est également résiduable (resp. dualement résiduable) et $(f \circ g)^\sharp = g^\sharp \circ f^\sharp$ (resp. $(f \circ g)^\flat = g^\flat \circ f^\flat$).

Les *langages formels* sur un alphabet A sont des sous ensembles du monoïde libre A^* , lequel est constitué des séquences finies de lettres (mots) de A . L'ensemble des langages formels doté de l'addition (correspondant à l'union des langages) et de la multiplication (correspondant à la concaténation des langages) est un dioïde, noté $(Pwr(A^*), \cup, \cdot)$. Le langage nul est noté $0 = \{\}$, le langage unité est noté $1 = \{\varepsilon\}$ où ε est le mot vide. Un mot $u = u_1 \dots u_k \in A^*$ est appelé un sous mot de $v \in A^*$ s'il existe une factorisation $v = v_1 u_1 v_2 \dots v_k u_k v_{k+1}$ avec $v_i \in A^*$, $i = 1, \dots, k+1$. L'ordre induit des sous mots sur A^* est $u \preceq v$ ssi u est un sous mot de $v \in A^*$.

Le *dioïde des séries formelles* à variables dans A et à coefficients dans \mathbb{R}_{\max} , noté $\mathbb{R}_{\max}(A)$, est muni de l'addition mot à mot et d'une multiplication sous forme de convolution. Aussi, pour $s = \bigoplus_{w \in A^*} s(w)w$ et $s' = \bigoplus_{w \in A^*} s'(w)w \in \mathbb{R}_{\max}(A)$, on a :

$$s \oplus s' \triangleq \bigoplus_{w \in A^*} (s(w) \oplus s'(w))w,$$

$$s \otimes s' \triangleq \bigoplus_{w \in A^*} (\bigoplus_{uv=w} s(u) \otimes s'(v))w.$$

Le dioïde des séries formelles est complet si les coefficients sont dans $\overline{\mathbb{R}}_{\max}$. Notons que pour $s, s' \in \overline{\mathbb{R}}_{\max}(A)$, $s \preceq s'$ (l'ordre naturel sur $\overline{\mathbb{R}}_{\max}(A)$) correspond à $s(w) \leq s'(w)$ pour tout $w \in A^*$. Par exemple, avec $A = \{a, b\}$, $s = 1a \oplus 2ab$ et $s' = 3ab$, on a $s \oplus s' = 1a \oplus 3ab$ et $s \wedge s' = 2ab$. Le langage $supp(s) = \{w \in A^* : s(w) \neq -\infty\}$ est appelé le *support de la série* s .

Une série formelle est reconnue par un automate fini $(\max, +)$ ssi elle est *rationnelle*, i.e., elle est formée par des opérations rationnelles (somme \oplus , produit \otimes et/ou étoile de Kleene) à partir de séries polynomiales (celles avec un support fini).

Le *produit de Hadamard* de séries formelles de $\overline{\mathbb{R}}_{\max}(A)$ est défini par :

$$s, s' \in \mathbb{R}_{\max}(A), s \odot s' \triangleq \bigoplus_{w \in A^*} (s(w) \otimes s'(w))w.$$

Proposition 1: [8] L'application $H_y : \overline{\mathbb{R}}_{\max}(A) \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_{\max}(A)$, $s \mapsto s \odot y$ est résiduable et sa résiduée est donnée par $H_y^\sharp(s)(w) = s(w) \not\# y(w)$, i.e., $H_y^\sharp(s) = \bigoplus_{w \in A^*} (s(w) \not\# y(w))w$.

Par la suite, nous utiliserons des *projections sur les langages*. Considérons tout d'abord la projection naturelle, notée P_c , de A vers A_c avec $A_c \subseteq A$ telle que

$$P_c(a) = \begin{cases} a & \text{if } a \in A_c, \\ \varepsilon & \text{if } a \in A \setminus A_c, \end{cases}$$

P_c , qui est un morphisme, préserve la concaténation et s'étend aux mots. Pour chaque mot, P_c ôte les événements (lettres) de $A_u = A \setminus A_c$ (habituellement la projection naturelle est utilisée pour ôter les événements inobservables, cf. [13]). Pour un langage L (ensemble de mots), on a $P_c(L) = \{P_c(s) \mid s \in L\}$. La projection inverse $P_c^{-1} : Pwr(A_c^*) \rightarrow Pwr(A^*)$, définie sur des langages, est telle que pour tout $M \subseteq A_c^*$, $P_c^{-1}(M) = \{w \in A^* \mid P_c(w) \in M\}$. Par exemple, avec $A = \{a, b\}$, $A_u = \{b\}$, on a $P_c(abab) = aa$ et $P_c^{-1}(aa) = b^*ab^*ab^*$.

III. COMPOSITION PARALLÈLE D'AUTOMATES $(\max, +)$

Les automates à multiplicités dans le semi-anneau $\overline{\mathbb{R}}_{\max}$, encore appelés automates $(\max, +)$, ont été introduits par S. Gaubert dans [4]. Ils permettent de représenter des systèmes à événements discrets temporisés qui mettent en jeu à la fois des phénomènes de synchronisation et de partage de ressources. En ce sens, ils étendent la classe des systèmes $(\max, +)$ -linéaires. Ils peuvent aussi être vus comme des automates logiques (tels qu'ils ont été définis dans [14]) dans lesquels le temps est intégré, c'est-à-dire, comme une classe d'automates temporisés. Leur étude bénéficie de résultats issus à la fois de la commande supervisée et de la théorie des systèmes linéaires sur les dioïdes, ils constituent à ce titre un pont entre ces deux théories.

Les définitions et résultats de base sur les automates $(\max, +)$, ainsi que des applications à l'analyse des performances des systèmes à événements discrets, sont présentés dans [4] et [5].

Définition 2: Un automate $(\max, +)$ défini sur un alphabet A est un 5-tuplet $G = (Q, A, q_0, t, Q_m)$, où Q est l'ensemble fini d'états, A est l'ensemble fini d'événements (encore appelé alphabet), $t : Q \times A \times Q \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_{\max}$ est la fonction de transition, q_0 (resp. Q_m) est l'état initial (resp. l'ensemble des états finaux).

La fonction de transition associée à un état $q \in Q$, un événement $a \in A$ et un état $q' \in Q$, une valeur de sortie $t(q, a, q') \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ correspondant à la durée de transition a de q vers q' (avec la convention que $t(q, a, q') = \varepsilon = -\infty$ si l'événement a ne permet pas de passer de l'état q à l'état q').

Un automate $(\max, +)$ est aussi souvent défini par un triplet (appelé *représentation linéaire*) (α, μ, β) où $\alpha \in \overline{\mathbb{R}}_{\max}^{1 \times |Q|}$ (resp. $\beta \in \overline{\mathbb{R}}_{\max}^{|Q| \times 1}$) est tel que $\alpha_q \neq \varepsilon$ (resp. $\beta_q \neq \varepsilon$) si q est l'état initial (resp. un état final), $\alpha_q = \varepsilon$ (resp. $\beta_q = \varepsilon$)

sinon, et μ est le *morphisme*

$$\mu : A \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_{\max}^{|\mathcal{Q}| \times |\mathcal{Q}|}, \mu(a)_{q q'} \triangleq t(q, a, q').$$

Notons que la matrice de morphisme peut aussi être vue comme un élément de $\overline{\mathbb{R}}_{\max}(A)^{|\mathcal{Q}| \times |\mathcal{Q}|}$, c'est-à-dire, $\mu = \bigoplus_{w \in A^*} \mu(w)w$, en étendant la définition de μ (sur A) aux mots de A^* à l'aide de la propriété de morphisme

$$\mu(a_1 \dots a_n) = \mu(a_1) \dots \mu(a_n).$$

Soulignons que nous avons alors $\mu^* = (\bigoplus_{a \in A} \mu(a)a)^*$. Etant intéressé par les comportements des automates $(\max, +)$ définis par $l = \alpha \mu^* \beta$ (voir ci-dessous), nous écrirons par abus de notation $\mu = \bigoplus_{a \in A} \mu(a)a$.

Le comportement d'un automate $(\max, +)$ $G = (Q, A, q_0, t, Q_m)$ est donné par la série formelle $l(G) \in \overline{\mathbb{R}}_{\max}$ suivante : pour $w = a_1 \dots a_n \in A^*$,

$$l(G)(w) = \max_{q_0, \dots, q_n \in Q} \alpha_{q_0} \otimes \left[\sum_{i=1}^n t(q_{i-1}, a_i, q_i) \right] \otimes \beta_{q_n}, \quad (3)$$

où q_n est un état final. Autrement dit, $l(G)(w)$ est le poids maximal de tous les chemins valués par w menant de l'état initial vers un état final.

Remarque 1: La série formelle $l(G)$ est un dateur généralisé [4], où $l(G)(w)$ représente la date à laquelle la séquence d'événements (tâches) w a été achevée (avec la convention $l(G)(w) = -\infty = \varepsilon$ si w n'a pas lieu). La spécialisation aux séries booléennes à coefficients dans $\{\varepsilon, e\}$ ramène à la notion classique de langage dans la théorie de Ramadge et Wonham, *i.e.*, $l(G)(w) \neq \varepsilon$ si w est un comportement admissible de l'automate.

De la même manière que les graphes d'événements temporisés admettent une description par des équations linéaires de type point fixe dans le dioïde des séries formelles $\mathbb{Z}_{\max}(\gamma)$, [1, §5.3], tout automate $(\max, +)$ peut être décrit linéairement dans le dioïde $\overline{\mathbb{R}}_{\max}(A)$ des séries formelles par le système d'équations :

$$\begin{cases} x = x\mu \oplus \alpha \\ y = x\beta \end{cases},$$

où $\mu = \bigoplus_{a \in A} \mu(a)a \in \overline{\mathbb{R}}_{\max}(A)^{|\mathcal{Q}| \times |\mathcal{Q}|}$ est la matrice de morphisme. Rappelons que sa plus petite solution est donnée par $y = l(G) = \alpha \otimes \mu^* \otimes \beta$.

Exemple 3: Considérons un système manufacturier élémentaire modélisé par l'automate $(\max, +)$ G de la figure 1. Trois tâches distinctes, notées a , b et c , durent respectivement 3, 4 et 5 unités de temps. Le système peut réaliser les séquences de tâches suivantes : a , ab , abc , $abcb$, $abcbc$, ... La représentation linéaire de G est donnée par

$$\alpha = \begin{pmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \end{pmatrix}, \beta = \begin{pmatrix} \varepsilon \\ e \\ e \end{pmatrix}, \mu(a) = \begin{pmatrix} \varepsilon & 3 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \end{pmatrix},$$

$$\mu(b) = \begin{pmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & 4 \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \end{pmatrix}, \mu(c) = \begin{pmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & 5 & \varepsilon \end{pmatrix}.$$

Le comportement de G peut être déduit en calculant

$$\begin{aligned} y = l(G) &= \alpha \otimes \mu^* \otimes \beta = \alpha \otimes (\mu(a)a \oplus \mu(b)b \oplus \mu(c)c)^* \otimes \beta \\ &= \alpha \otimes \begin{pmatrix} \varepsilon & 3a & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & 4b \\ \varepsilon & 5c & \varepsilon \end{pmatrix}^* \otimes \beta. \end{aligned}$$

On obtient la série de $\overline{\mathbb{R}}_{\max}(A)$ suivante :

$$y = 3a(9bc)^*(4b \oplus e).$$

Par exemple, $y(ab) = 7$ signifie que la séquence ab sera achevée à la date 7 (en considérant que le système commence à fonctionner à l'instant 0).

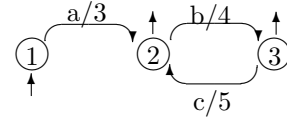


Fig. 1. Automate $(\max, +)$ G

Une définition de la *composition parallèle* d'automates $(\max, +)$ a été proposée, elle constitue une extension de la composition parallèle des automates logiques aux automates à multiplicités.

Définition 3: [8] Considérons deux automates $(\max, +)$ G_c et G correspondant respectivement au contrôleur et au système :

$$G_c = (Q_c, A, q_{c,0}, t_c, Q_{c,m}), \quad G = (Q_g, A, q_{g,0}, t_g, Q_{g,m}). \quad (4)$$

De façon classique, nous considérons la partition $A = A_c \cup A_u$, où A_c (resp. A_u) est l'ensemble des événements contrôlables (resp. incontrôlables) dans le système. La *composition parallèle* de G et G_c , modélisant le système contrôlé, est définie comme suit :

$$\begin{aligned} G_c \parallel G &= (Q_c \times Q_g, A, q_0, t, Q_m) \\ \text{avec } q_0 &= \langle q_{c,0}, q_{g,0} \rangle, \quad Q_m = Q_c \times Q_{g,m}, \\ &t(\langle q_c, q_g \rangle, a, \langle q'_c, q'_g \rangle) = \\ &\begin{cases} t_c(q_c, a, q'_c) \otimes t_g(q_g, a, q'_g), & \text{si } a \in A_c, \\ t_g(q_g, a, q'_g), & \text{si } a \in A_u \text{ et } q_c = q'_c, \\ \varepsilon, & \text{si } a \in A_u \text{ et } q_c \neq q'_c. \end{cases} \end{aligned} \quad (5)$$

L'interprétation de la composition parallèle d'un système avec son contrôleur est la suivante. Le contrôleur est un automate $(\max, +)$ G_c s'exécutant en parallèle (de manière synchrone) avec l'automate G du système. L'automate G_c observe les événements générés dans le système G et fait évoluer son état en conséquence. A partir d'un état donné q_c , si une transition associée à un événement contrôlable a existe (*i.e.*, $\exists q'_c$ tel que $t_c(q_c, a, q'_c) \neq \varepsilon$), alors cet événement est autorisé par le contrôleur et la transition correspondante (dans le système) est retardée de $t_c(q_c, a, q'_c)$ unités de temps. Dans le cas contraire (*i.e.*, $\nexists q'_c$ tel que $t_c(q_c, a, q'_c) \neq \varepsilon$), l'événement (qui était possible pour le système non contrôlé) n'est pas autorisé par le contrôleur. D'autre part, les transitions non contrôlables (*i.e.*, $t_g(q_g, a, q'_g)$, $a \in A_u$) peuvent être ni invalidées, ni retardées, et c'est pourquoi la transition est inchangée dans le produit parallèle.

Dans [9] a été établie la représentation linéaire d'une composition parallèle d'automates $(\max,+)$ ainsi que son comportement, rappelé dans le théorème suivant.

Théorème 2: [9] Le comportement résultant de la composition parallèle de G et G_c est donné par :

$$l(G_c \parallel G) = l(G_c) \odot_{A_u} l(G), \quad (6)$$

où \odot_{A_u} est appelé *produit de Hadamard généralisé* et est défini par

$$(l(G_c) \odot_{A_u} l(G))(w) = l(G_c)(P_c(w)) \otimes l(G)(w). \quad (7)$$

IV. COMMANDE SUPERVISÉE D'AUTOMATES $(\max,+)$

Une extension des techniques de commande supervisée aux automates $(\max,+)$ a récemment été proposée [9], [10]. Nous allons faire un bref rappel de ces résultats qui consistent à appliquer les précédents outils algébriques à la synthèse d'un superviseur le plus permissif possible, permettant de surcroît un fonctionnement en juste-à-temps du système contrôlé. Nous proposons ensuite deux résultats nouveaux. La synthèse d'un superviseur satisfaisant le critère dual est d'abord traité. Nous nous intéressons enfin à la synthèse d'un superviseur impliquant uniquement des délais à valeurs positives.

Plutôt que de considérer les automates $(\max,+)$ en tant que tels, on s'intéresse à leurs comportements, correspondant à des séries formelles (de $\mathbb{R}_{\max}(A)$) définies par (3). Cette approche est naturelle, au sens où les comportements de référence de la commande supervisée sont classiquement définis par des langages de spécification, lesquels correspondent à des séries formelles dans le cadre des automates $(\max,+)$. La série obtenue correspond à un superviseur optimal qui peut être réalisée par un automate $(\max,+)$, sous réserve d'être rationnelle.

A. Superviseur le plus permissif et en juste-à-temps

Notons $y \in \mathbb{R}_{\max}(A)$ (resp. $y_c \in \mathbb{R}_{\max}(A)$) le comportement $l(G)$ (resp. $l(G_c)$) du système (resp. du contrôleur). On se donne une série $y_{ref1} \in \mathbb{R}_{\max}(A)$ spécifiant le comportement désiré du système contrôlé (dont le comportement est donné par $y_c \odot_{A_u} y$, cf. théorème 2). Le problème de commande considéré consiste à

trouver la plus grande série y_c t.q. $y_{ref1} \succeq y_c \odot_{A_u} y$. (8)

Cette inégalité s'interprète au regard de l'ordre naturel de $\mathbb{R}_{\max}(A)$. Il s'agit de trouver la plus grande série y_c , c'est-à-dire, les plus grands coefficients $\overline{y_c}(w)$ pour chaque mot w , et donc (par isotonie du produit de Hadamard généralisé) les plus grands coefficients $(\overline{y_c} \odot_{A_u} y)(w)$, tels que $y_{ref1}(w) \succeq (\overline{y_c} \odot_{A_u} y)(w)$. Ainsi, le contrôleur retarde autant que possible l'achèvement des séquences d'événements w du système supervisé (dont le comportement est donné par $\overline{y_c} \odot_{A_u} y$). De plus, comme $y_{ref1} \succeq y_c \odot_{A_u} y$, la date d'achèvement de $(\overline{y_c} \odot_{A_u} y)(w)$ dans le système composé est antérieure à celle spécifiée par $y_{ref1}(w)$, ceci pour tout w . Un tel objectif de commande satisfait le critère dit de *juste à temps*, notamment utilisé pour la commande des graphes d'événements temporisés

(voir par exemple [1, §5.6] ou [11]). D'un point de vue logique, ce superviseur est le plus permissif qui permette de restreindre le comportement du système au comportement maximal souhaitée *via* y_{ref1} .

Introduisons la notation $H_y^{A_u}$ pour l'application correspondant au produit de hadamard généralisé, à savoir

$$H_y^{A_u} : s \mapsto s \odot_{A_u} y. \quad (9)$$

Nous avons montré dans [9] que la Proposition 1 admet l'analogie suivante en présence d'événements incontrôlables ($A_u \neq \emptyset$).

Proposition 2: L'application isotone $H_y^{A_u} : \mathbb{R}_{\max}(A) \rightarrow \mathbb{R}_{\max}(A)$ est résiduable et sa résiduée est donnée par

$$(H_y^{A_u})^\sharp(s)(w) = \begin{cases} \bigwedge_{u \in P_c^{-1}(w) \cap \text{supp}(y)} s(u) \phi y(u), & \text{si } w \in A_c^*, \\ T, & \text{si } w \notin A_c^*. \end{cases} \quad (10)$$

Corollaire 1: La solution au problème (8) est donnée par $(H_y^{A_u})^\sharp(y_{ref1})$.

Notons que la valeur $(H_y^{A_u})^\sharp(y_{ref1})(w) = T$ pour $w \notin A_c^*$ n'influence pas le comportement du système composé (en boucle fermée), en effet, d'après la formule (7) on évalue $(H_y^{A_u})^\sharp(y_{ref1})$ (i.e., le comportement de notre contrôleur) seulement pour les mots projetés dans A_c^* .

Remarque 2: La contrôlabilité de la série de référence y_{ref1} a été étudiée dans [10]. Plus précisément, on a caractérisé les séries qui peuvent être atteintes *via* la commande proposée dans le corollaire 1. On a notamment proposé une formule permettant de calculer le plus grand "sous-comportement" contrôlable, à savoir $(H_y^{A_u} \circ H_y^{A_u})^\sharp(y_{ref1})$.

Exemple 4: Considérons de nouveau le système décrit dans l'exemple 3 en prenant pour hypothèse que les tâches a et c peuvent être retardées (on peut décider de décaler dans le temps le début de leur exécution) ou même interdites. Au contraire, la tâche b ne peut être ni retardée, ni empêchée, ce qui signifie qu'elle démarre dès qu'elle peut être exécutée. En notant $A = \{a, b, c\}$ l'ensemble des événements (alphabet), on a $A_c = \{a, c\}$ et $A_u = \{b\}$.

On souhaite que le système se comporte au plus tard selon la série suivante :

$$y_{ref1} = 7a \oplus 9ab \oplus 13abc,$$

ce qui signifie que les séquences a , ab et abc devraient être achevées au plus tard aux dates 7, 9 et 13. De plus, toute autre séquence ne devrait pas avoir lieu.

En utilisant le corollaire 1, on obtient $\overline{y_c} = (H_y^{A_u})^\sharp(y_{ref1})$ avec :

$$\overline{y_c}(w) = \top,$$

pour tout mot $w \notin A_c^*$ (par exemple : ab, abc, \dots),

$$\begin{aligned} \overline{y_c}(a) &= y_{ref1}(a) \phi y(a) \wedge y_{ref1}(ab) \phi y(ab) \\ &= 7 \phi 3 \wedge 9 \phi 7 = 2, \end{aligned}$$

$$\overline{y_c}(w') = \varepsilon,$$

pour tout mot $w' \in A_c^*$, $w' \notin \{a\}$, notamment

$$\begin{aligned} \overline{y_c}(ac) &= y_{ref1}(abc) \phi y(abc) \wedge y_{ref1}(abcb) \phi y(abcb) \\ &= 13 \phi 12 \wedge \varepsilon \phi 16 = \varepsilon. \end{aligned}$$

Le rôle du contrôleur dans cet exemple est donc de retarder l'événement (a) de deux unités de temps, puis d'interdire (c) . Notons que si la séquence abc (permise dans y_{ref1}) avait été rendue possible, alors la séquence $abcb$ n'aurait pu être empêchée (b étant incontrôlable), ce qui violerait la référence donnée par y_{ref1} .

Le comportement du système supervisé est $\overline{y}_s = \overline{y}_c \odot y = \bigoplus_{w \in A^*} (\overline{y}_c(P_c(w)) \otimes y(w)) w = 5a \oplus 9ab$. Un automate $(\max, +)$ \overline{G}_s qui réalise \overline{y}_s est représenté sur la figure 2.

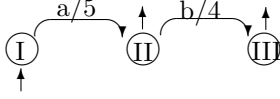


Fig. 2. Automate $(\max, +)$ $\overline{G}_s = \overline{G}_c || G$

B. Superviseur le moins permissif en juste-après

On s'intéresse ici au problème dual de (8), à savoir de

$$\text{trouver la plus petite série } y_c \text{ t.q. } y_c \odot_{A_u} y \succeq y_{ref2}. \quad (11)$$

Il s'agit de trouver les plus petits coefficients $y_c(w)$ pour chaque w , et donc les plus petits coefficients $(y_c \odot_{A_u} y)(w)$, tels que $(y_c \odot_{A_u} y)(w) \succeq y_{ref2}(w)$. Autrement dit, le contrôleur va ici retarder le moins possible le système. En ce sens, il est à rapprocher de la commande minimisant les retards proposée dans [7] pour les graphes d'événements temporisés. D'un point de vue logique, ce superviseur est le moins permissif qui garantit le comportement minimal souhaité *via* y_{ref2} .

Pour résoudre le problème (11), nous allons le reformuler en termes de séries complémentées comme suit.

Définition 4: Soit $y \in \mathbb{R}_{\max}(A)$, on note $\mathbb{C}y$ la série de $\mathbb{R}_{\max}(A)$ définie par

$$\forall w, \mathbb{C}y(w) \triangleq -y(w),$$

avec, par convention, $-\varepsilon = \top$ et $-\top = \varepsilon$. Notons que $\mathbb{C}\mathbb{C}y = y$.

En fait, il s'avère que le problème (11) peut aisément se reformuler comme un problème (8) :

$$\begin{aligned} y_c \odot_{A_u} y &\succeq y_{ref2} \\ \iff \forall w, y_c(P_c(w)) \otimes y(w) &\succeq y_{ref2}(w) \\ \iff \forall w, y_c(P_c(w)) + y(w) &\succeq y_{ref2}(w) \\ \iff \forall w, -y_c(P_c(w)) - y(w) &\leq -y_{ref2}(w) \\ \iff \forall w, \mathbb{C}y_c(P_c(w)) \otimes \mathbb{C}y(w) &\preceq \mathbb{C}y_{ref2}(w) \\ \iff \mathbb{C}y_c \odot_{A_u} \mathbb{C}y &\preceq \mathbb{C}y_{ref2}. \end{aligned}$$

Ce constat suffit à affirmer que tous les résultats établis pour le problème initial (8) peuvent être utilisés pour le problème dual au simple prix d'une ré-écriture. En particulier, on a le corollaire suivant.

Corollaire 2: La solution au problème (11) est donnée par $\mathbb{C} \left((H_{\mathbb{C}y}^{A_u})^\#(\mathbb{C}y_{ref2}) \right)$. Autrement dit, $H_y^{A_u}$ est dualement résiduable et $(H_y^{A_u})^b(y_{ref2}) = \mathbb{C} \left((H_{\mathbb{C}y}^{A_u})^\#(\mathbb{C}y_{ref2}) \right)$.

Exemple 5: Reprenons l'exemple 4, avec pour objectif que le système se comporte cette fois au plus tôt selon la série $y_{ref2} = 3a \oplus 7ab \oplus 13abc$. En utilisant le corollaire 2, on obtient $\underline{y}_c = (H_y^{A_u})^b(y_{ref2}) = \mathbb{C} \left((H_{\mathbb{C}y}^{A_u})^\#(\mathbb{C}y_{ref2}) \right)$ avec :

- $\underline{y}_c(w) = \varepsilon$, pour tout mot $w \notin A_c^*$ (par ex. ab, abc, \dots),
- $\underline{y}_c(a) = 0, \underline{y}_c(ac) = 1$,
- $\underline{y}_c(w') = \top$, pour tout mot $w' \in A_c^*, w' \notin \{a, ac\}$.

Le rôle du contrôleur dans cet exemple est donc d'autoriser sans retarder l'événement (a) , d'autoriser la première occurrence de (c) en la retardant d'une unité de temps, puis d'interdire les occurrences suivantes de (c) . Le comportement du système supervisé est $\underline{y}_s = \underline{y}_c \odot y = 3a \oplus 7ab \oplus 13abc \oplus 17abcb$.

Remarque 3: Une question importante est de savoir si la série calculée pour un contrôleur est rationnelle car c'est à cette condition que le contrôleur pourra être réalisé par un automate $(\max, +)$.

Rappelons qu'une série est $(\max, +)$ -rationnelle (respectivement $(\min, +)$ -rationnelle) si elle est formée par des opérations rationnelles (somme \oplus impliquant l'opérateur \max , resp. \min ; produit \otimes et/ou étoile de Kleene) à partir de polynômes. La solution \overline{y}_c (resp. \underline{y}_c) au problème de commande (8) (resp. (11)) donnée par (10) (resp. le corollaire 2) est telle que $\forall w, \overline{y}_c(P_c w) = y(w) \# y_{ref1}(w) = y(w) \odot \mathbb{C}y_{ref1}(w)$ (resp. $\underline{y}_c(P_c w) = \mathbb{C}(\mathbb{C}y(w) \# \mathbb{C}y_{ref2}(w)) = \mathbb{C}(\mathbb{C}y(w) \odot y_{ref2}(w))$). Il apparaît que cette solution est rationnelle dès que $y \odot \mathbb{C}y_{ref1}$ (resp. $\mathbb{C}(\mathbb{C}y \odot y_{ref2})$) l'est. Puisque le produit de Hadamard est une opération rationnelle (voir par exemple [2]), si y et $\mathbb{C}y_{ref1}$ (resp. $\mathbb{C}y$ et y_{ref2}) sont rationnelles alors la solution proposée l'est aussi. Il a été montré dans [12] qu'avec une série rationnelle $s \in \mathbb{R}_{\max}(A)$, $\mathbb{C}s \in \mathbb{R}_{\max}(A)$ est rationnelle *ssi* s est *non-ambigüe*, *i.e.*, à la fois $(\max, +)$ et $(\min, +)$ rationnelle. Autrement dit, si on se restreint à une série y_{ref1} (resp. y) non-ambigüe, alors la série proposée pour le contrôleur est rationnelle. Précisons que les séries non-ambigües sont reconnues par des *automates non-ambigus*, *i.e.*, des automates pour lesquels il y a au plus un chemin reconnaissant chaque mot w (ce qui correspond *grosso modo* à des automates déterministes).

En pratique, on peut être amené à chercher à encadrer le comportement du système supervisé, à savoir

$$\text{trouver } y_c \text{ telle que } y_{ref1} \succeq y_c \odot_{A_u} y \succeq y_{ref2}. \quad (12)$$

Ce problème trouve dans le corollaire suivant sa solution étonnement simple.

Corollaire 3: L'ensemble des solutions au problème (12) est donné par l'intervalle de $\mathbb{R}_{\max}(A)$ suivant

$$\left[(H_y^{A_u})^b(y_{ref2}), (H_y^{A_u})^\#(y_{ref1}) \right].$$

C. Superviseur de comportement non-décroissant

Dans cette partie, on spécialise les résultats aux systèmes à événements discrets pour lesquels les durées associées aux transitions d'état sont toutes positives. Plus précisément, on veut s'astreindre à ce que les délais imposés au système par le superviseur aient tous des valeurs positives et donc que le modèle du contrôleur sous la forme d'un automate $(\max, +)$ ait des transitions d'état toutes positives. Nous allons commencer par montrer qu'un tel automate admet pour comportement la forme suivante de série de $\mathbb{R}_{\max}(A)$.

Définition 5: Une série $s \in \mathbb{R}_{\max}(A)$ est dite *non-décroissante sur son support* si

$$\forall v, w \in \text{supp}(s), v \preceq w \implies s(v) \preceq s(w), \quad (13)$$

dans laquelle la première inégalité met en jeu la relation d'ordre sur les sous-mots alors que la deuxième inégalité s'entend pour l'ordre naturel de $\overline{\mathbb{R}}_{\max}$.

Par exemple,

- $y_1 = 1a \oplus 2ab \oplus 1aba \oplus 3abaa$ n'est pas non-décroissante sur son support parce que $y_1(ab) \not\leq y_1(aba)$;
- $y_2 = 1a \oplus 2ab \oplus 3abaa$ est non-décroissante sur son support (même si $y(aba) = \varepsilon \prec y(ab) = 2$ puisque $aba \notin \text{supp}(y)$).

Notons $\overline{\mathbb{R}}_{\max}^\uparrow(A)$ le sous-ensemble de $\overline{\mathbb{R}}_{\max}(A)$ composé des séries non décroissantes sur leur support.

Lemme 1: Le comportement $l(G)$ d'un automate $G = (Q, A, \alpha, t, \beta)$ est une série non-décroissante sur son support ssi toutes les transitions $t(q, a, q')$ sont positives ou égales à ε .

Proof: Un raisonnement par induction peut directement être appliqué à partir de la définition du comportement (3). ■

Notons que les automates $(\max, +)$ à transitions toutes positives (ou, de façon équivalente, admettant une série de comportement non décroissante sur son support) sont les seuls "réalistes" puisque les valeurs des transitions s'interprètent comme des durées. Intéressons-nous maintenant à la commande de tels automates $(\max, +)$. Plus précisément, on cherche ici à résoudre le problème de commande considéré précédemment de sorte que le superviseur admette pour comportement une série non-décroissante sur son support, i.e.,

$$\text{trouver } y_c \in \overline{\mathbb{R}}_{\max}^\uparrow(A) \text{ t.q. } y_{ref1} \succeq y_c \odot_{A_u} y \succeq y_{ref2}. \quad (14)$$

Comme représenté par le diagramme commutatif de la figure 3, il faut alors étudier la résiduabilité et la résiduabilité duale de $H_y^{A_u} \circ I$ où I correspond à l'injection canonique de $\overline{\mathbb{R}}_{\max}^\uparrow(A)$ dans $\overline{\mathbb{R}}_{\max}(A)$. Comme rappelé dans le théorème 1, cette application est résiduable et dualement résiduable si $H_y^{A_u}$ et I le sont. Puisque la proposition 2 et le corollaire 2 ont déjà montré la résiduabilité et la résiduabilité duale de $H_y^{A_u}$, il nous reste à prouver celles de I .

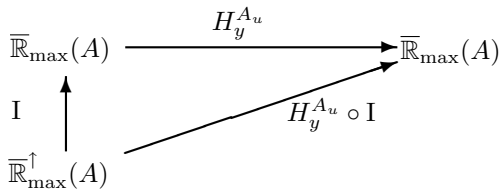


Fig. 3. Diagramme commutatif considéré

Remarquons tout d'abord que $\overline{\mathbb{R}}_{\max}^\uparrow(A)$ n'est pas fermé pour la somme de séries. Prenons $s_1 = 1a \oplus 2ab$ et $s_2 = 3a$, ces deux séries sont non-décroissantes sur leur support, mais leur somme $s_1 \oplus s_2 = 3a \oplus 2ab$ ne l'est pas. Ceci implique que $\overline{\mathbb{R}}_{\max}^\uparrow(A)$ ne forme pas un sous-dioïde de $\overline{\mathbb{R}}_{\max}(A)$. Pour autant, les propositions suivantes montrent que l'injection canonique de $\overline{\mathbb{R}}_{\max}^\uparrow(A)$ dans $\overline{\mathbb{R}}_{\max}(A)$ est résiduable et dualement résiduable en tant qu'application définie sur ces ensembles ordonnés, à défaut d'être des dioïdes (voir définition 1).

Proposition 3: L'injection canonique $I : \overline{\mathbb{R}}_{\max}^\uparrow(A) \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_{\max}(A)$ est résiduable et sa résiduée est donnée par

$$I^\sharp(s)(v) = \begin{cases} \bigwedge_{\{w \in \text{supp}(s), v \preceq w\}} s(w) & \text{si } v \in \text{supp}(s), \\ \varepsilon & \text{sinon.} \end{cases} \quad (15)$$

Proof: On peut se convaincre facilement que I^\sharp définie par (15) est une application isotone en ayant notamment en tête que $y_1, y_2 \in \overline{\mathbb{R}}_{\max}(A)$, $y_1 \preceq y_2 \Rightarrow \text{supp}(y_1) \subseteq \text{supp}(y_2)$.

On vérifie maintenant que I et I^\sharp satisfont les inégalités (1). On a d'une part pour $s \in \overline{\mathbb{R}}_{\max}(A)$:

$$(I \circ I^\sharp)(s) = I^\sharp(s) \preceq s.$$

D'autre part, une série non-décroissante sur son support $s \in \overline{\mathbb{R}}_{\max}^\uparrow(A)$ satisfait $\forall v, w \in \text{supp}(s), v \preceq w \Rightarrow s(v) \preceq s(w)$, ce qui implique $s(v) = \bigwedge_{\{w \in \text{supp}(s), v \preceq w\}} s(w)$, et on a donc

$$(I^\sharp \circ I)(s) = s. \quad \blacksquare$$

La série $I^\sharp(s)$ définie par (15) est la plus grande série inférieure à s et non-décroissante sur son support.

Exemple 6: Reprenons l'exemple 4, avec pour objectif que cette fois le système se comporte au plus tard selon la série $y'_{ref1} = 7a \oplus 9ab \oplus 13abc \oplus 18abcb \oplus 24abcbc$. En utilisant le corollaire 2, on obtient $\overline{y}'_c = (H_y^{A_u})^\sharp(y'_{ref1})$ avec :

- $\overline{y}'_c(w) = \top$, pour tout mot $w \notin A_c^*$,
- $\overline{y}'_c(a) = 2, \overline{y}'_c(ac) = 1$,
- $\overline{y}'_c(w') = \top$, pour tout mot $w' \in A_c^*, w' \notin \{a, ac\}$.

La série \overline{y}'_c n'est pas décroissante sur son support car $\overline{y}'_c(a) \not\leq \overline{y}'_c(ac)$. La proposition 3 donne la série non décroissante sur son support répondant au problème de commande. On a notamment $I^\sharp(\overline{y}'_c)(a) = 1$ et $I^\sharp(\overline{y}'_c)(ac) = 1$.

Proposition 4: L'injection canonique $I : \overline{\mathbb{R}}_{\max}^\uparrow(A) \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_{\max}(A)$ est dualement résiduable et sa résiduée duale est donnée par

$$I^\flat(s)(w) = \begin{cases} \bigoplus_{\{v \preceq w\}} s(v) & \text{si } w \in \text{supp}(s), \\ \varepsilon & \text{sinon.} \end{cases} \quad (16)$$

Proof: Le mécanisme de preuve est identique à celui de la proposition 3 en notant que

- $(I \circ I^\flat)(s) = I^\flat(s) \succeq s$.
- s non-décroissante sur son support satisfait $\forall v, w \in \text{supp}(s), v \preceq w \Rightarrow s(v) \preceq s(w)$, ce qui implique $s(w) = \bigoplus_{\{v \preceq w\}} s(v)$, et on donc $(I^\flat \circ I)(s) = s$. ■

La série $I^\flat(s)$ définie par (16) est la plus grande série inférieure à s et non-décroissante sur son support.

Exemple 7: Reprenons l'exemple 5, avec pour objectif que le système se comporte cette fois au plus tôt selon la série $y'_{ref2} = 7a \oplus 9ab \oplus 13abc$. En utilisant le corollaire 2, on obtient $\overline{y}'_c = (H_y^{A_u})^\flat(y'_{ref2})$ avec :

- $\overline{y}'_c(a) = 4, \overline{y}'_c(ac) = 2$,
- $\overline{y}'_c(w) = y_c(w)$, pour tout mot $w \notin \{a, ac\}$.

La série \overline{y}'_c n'est pas décroissante sur son support car $\overline{y}'_c(a) \not\leq \overline{y}'_c(ac)$. La proposition 4 donne la série non décroissante sur son support répondant au problème de

commande. On a notamment $\mathbb{I}^b(\underline{y}'_c)(a) = 4$ et $\mathbb{I}^b(\underline{y}'_c)(ac) = 4$.

Corollaire 4: L'ensemble des solutions au problème (14) est donné par l'intervalle de $\mathbb{R}_{\max}(A)$ suivant

$$\left[\mathbb{I}^b \circ H_y^{A_u^b}(y_{ref2}), \mathbb{I}^\# \circ H_y^{A_u^\#}(y_{ref1}) \right].$$

Remarque 4: Pour se conformer à un cadre complètement réaliste, on peut de plus considérer qu'à la fois le comportement du système donné par la série y et la spécification y_{ref} sont des séries non-décroissantes sur leur support (*i.e.* les système à événements discrets correspondant ont des durées de transitions d'état toutes positives). Une telle hypothèse revient simplement à considérer un cas particulier de la solution proposée ici.

Remarque 5: Les résultats de contrôlabilité établis dans [10] s'étendent directement au cas des séries non-décroissantes.

Remerciement Ce travail a été soutenu par l'Académie Tchèque des Sciences, projet de recherche AV0Z10190503 et par le projet EU.ICT N.224498 (DISC).

V. CONCLUSION

Nous avons présenté une approche permettant la commande des automates $(\max,+)$, basée sur le produit parallèle d'un contrôleur avec le système initial. Dans ce papier, nous avons proposé deux résultats nouveaux sur le sujet : un contrôleur le moins permissif et en "juste-après" et une spécialisation des résultats aux séries non décroissantes sur leurs supports (c'est-à-dire, tels que les délais associés aux transitions sont non négatives).

Dans nos travaux futurs, nous allons nous attacher à la définition du produit synchrone des automates $(\max,+)$ afin de pouvoir prendre en compte les phénomènes de parallélisme. Plus généralement, nous souhaitons étudier la commande décentralisée des automates $(\max,+)$.

RÉFÉRENCES

- [1] F. Baccelli, G. Cohen, G.J. Olsder, J.-P. Quadrat. *Synchronization and Linearity. An Algebra for Discrete Event Systems*. New York, Wiley, 1992.
- [2] J. Berstel, C. Reutenauer. *Rational Series and their Languages*. Berlin, Springer Verlag, 1988.
- [3] T.S. Blyth, M.F. Janowitz. *Residuation Theory*. Oxford, Pergamon Press, 1972.
- [4] S. Gaubert. *Performance Evaluation of $(\max,+)$ Automata*, IEEE Transaction on Automatic Control, 40(12), pp. 2014-2025, 1995.
- [5] S. Gaubert, J. Mairesse. *Modeling and Analysis of Timed Petri Nets using Heaps of Pieces*. IEEE Transaction on Automatic Control, 44(4) : 683-698, 1999.
- [6] B. Heidergott, G. J. Olsder, J. van der Woude. *Max Plus at Work*. Princeton Series in Applied Mathematics, 2006.
- [7] L. Houssin, S. Lahaye, J.-L. Boimond. *Control of Constrained $(\max,+)$ -Linear Systems Minimizing Delays*, In proceedings of INCOM'06, St Etienne, France, 2006.
- [8] J. Komenda, S. Lahaye, J.-L. Boimond. *Control of $(\max,+)$ Automata : Logical and Timing Aspects*, In Proceedings of WODES 2008, Gothenburg, Sweden, May 28-30, 2008.
- [9] J. Komenda, S. Lahaye, J.-L. Boimond. *Supervisory Control of $(\max,+)$ Automata : A single Step Approach*. European Control Conference (ECC), 2009, Budapest, Hungary.
- [10] J. Komenda, S. Lahaye, J.-L. Boimond. *Controllability of $(\max,+)$ Formal Power Series*. IFAC Workshop on Dependable Control of Discrete Systems (DCDS), 2009, Bari, Italy.
- [11] S. Lahaye, J.-L. Boimond, J.-L. Ferrier. *Just in Time Control of Time-Varying Discrete Event Dynamic Systems in $(\max,+)$*

Algebra, International Journal of Production Research (IJPR), vol. 46, no 19, 2008.

- [12] S. Lombardy, J. Mairesse. *Series which are both Max-plus and Min-plus Rational are Unambiguous*, RAIRO - Theoretical Informatics and Applications 40, pp. 1-14, 2006.
- [13] F. Lin, W.M. Wonham, *On Observability of Discrete-Event Systems*, Information Sciences, 44 : 173-198, 1988.
- [14] P.J. Ramadge, W.M. Wonham. *The Control of Discrete-Event Systems*, Proc. IEEE, 77 :81-98, 1989.
- [15] H. Wong-Toi, G. Hoffmann, *The Control of Dense Real-Time Discrete Event Systems*, Technical Report STA-CS-92-1411, Stanford University, 1995.