

Modélisation de GET Valués sur un Dioïde

GET : Graphes d'Événements Temporisés

GT SED/GdR MACS

B.Cottenceau LARIS

10 Avril 2014

Contexte

- Systèmes à Événements Discrets (SED) sur des algèbres de type $(\max, +)$.

GET décrits par des équations linéaires sur des dioïdes (Baccelli *et al* (1992), Heidergott *et al* (2006))¹.

Mots-clés *systèmes $(\max, +)$ -linéaires, systèmes $(\min, +)$ -linéaires, systèmes linéaires sur des semi-anneaux idempotents, systèmes linéaires sur des dioïdes*

¹Baccelli, Cohen, Olsder, Quadrat (1992) Synchronisation and Linearity, Wiley
Heidergott, Olsder, van der Woude, (2006) Max Plus at Work: Modeling and Analysis of Synchronized Systems

Algèbre $(\max, +)$: $a, b \in \mathbb{Z}$,

$$a \oplus b \triangleq \max(a, b) \quad a \otimes b \triangleq a + b$$

Sur l'algèbre $(\max, +)$ on a :

$$2 \otimes 1 = 3, \quad 5 \oplus 2 = 5, \quad 1 \oplus 1 = 1 \text{ (idempotence)}$$

$$3 \otimes (2 \oplus 1) = (3 \otimes 2) \oplus (3 \otimes 1) = 5 \oplus 4 = 5$$

Les algèbres $(\mathbb{Z}, \max, +)$ et $(\mathbb{Z}, \min, +)$ sont des semi-anneaux idempotents (aussi appelés **dioides**).

Systemes (max,+)

Les systemes pour lesquels il existe des modeles sur des algebres de type (max,+).

GET : modeles (max,+) sur des dateurs, modeles (min,+) sur des compteurs, modeles sur des dioïdes de series formelles.

Automates (max,+) : modeles decrivant des temps d'execution pour une classe d'automates temporises.

Network Calculus/RealTime Calculus : modeles (min,+) pour decrire les flux de donnees dans des reseaux de communication.

L'approche $(\max,+)$ au LARIS

Laboratoire Angevin de Recherche en Ingénierie des Systèmes (ex-LISA)

Boimond J.L.



Hardouin L.



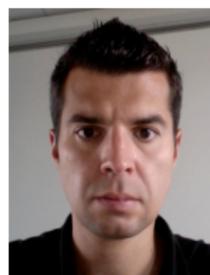
Lahaye S.



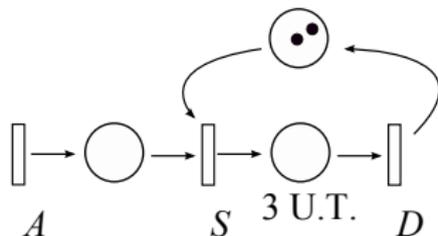
Declerck P.



Lhommeau M.



Thèmes: modèles entrée-sortie, systèmes $(\max,+)$ non-stationnaires, automates $(\max,+)$, modèles intervalles, systèmes $(\min,+)$ continus, GET P-temporels (contraintes de durées), Network Calculus, commande (poursuite de trajectoire, poursuite de modèle, commande prédictive), outils de calcul (bibliothèque MinMaxGD)



- Les **Graphes d'Événements Temporisés** peuvent être décrits par des séries formelles sur un dioïde ² noté $\mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta]$ (Baccelli *et al* (1992))
- γ, δ : opérateurs de décalage événementiel et temporel.

$\delta^3 S \iff$ événements S retardés de 3 U.T.

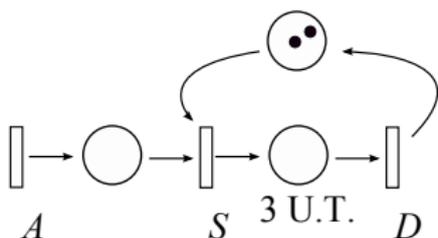
$\gamma^2 D \iff$ événements D décalés de 2 événements

$$D = \delta^3 S$$

$$S = \gamma^2 D \oplus A$$

²Baccelli, Cohen, Olsder, Quadrat (1992) Synchronisation and Linearity, Wiley

Modèle entrée-sortie des GET (Baccelli *et al* (1992))



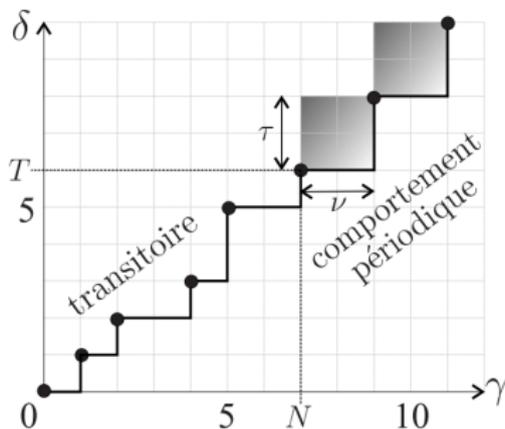
- Tout GET se ramène à une série périodique de $\mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta]$

$$\begin{cases} D = \delta^3 S \\ S = \gamma^2 D \oplus A \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} D = \delta^3 (\gamma^2 \delta^3)^* A \\ S = (\delta^3 \oplus \gamma^2 \delta^6 \oplus \gamma^4 \delta^9 \oplus \dots) A \end{cases}$$

- La série de **transfert** $\delta^3 (\gamma^2 \delta^3)^*$ décrit complètement le GET.

$$D = \delta^3 (\gamma^2 \delta^3)^* A$$

Les séries de transfert des GET sont (ultimement) périodiques ³ (Gaubert (1992))



$$s = \bigoplus_i \gamma^{n_i} \delta^{t_i}$$

$$s = \gamma^0 \delta^0 \oplus \gamma^1 \delta^1 \oplus \gamma^2 \delta^2 \oplus \gamma^4 \delta^3 \dots \oplus \gamma^7 \delta^6 (\gamma^2 \delta^2)^*$$

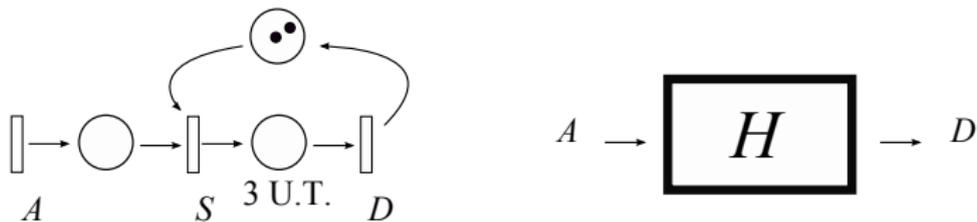
Librairie MinMaxGD C++/Scilab (LARIS⁴) : manipulation de séries de $\mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta]$

³S.Gaubert (1992) Théorie des systèmes linéaires sur les dioïdes. PhD

⁴Cottenceau, Lhommeau, Hardouin (2000) Data processing tool for calculation in dioid [↻](#)

Notion de transfert

Un GET est décrit par sa série (ou matrice) de transfert:

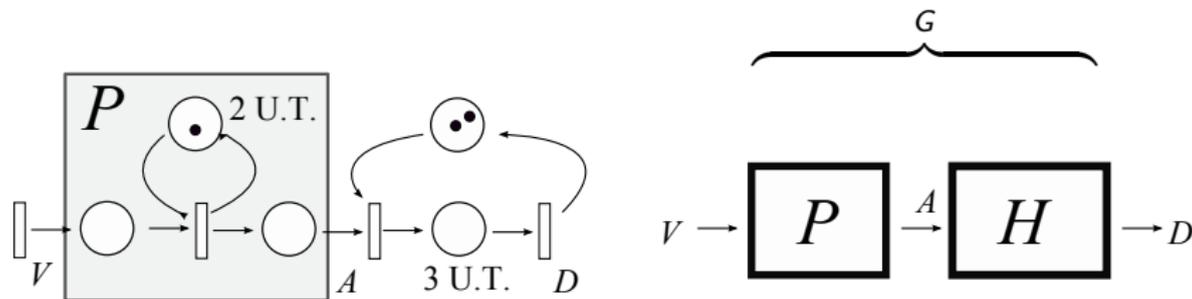


$$D = HA$$

avec H une série (ou matrice) périodique de $\mathcal{M}_{in}^{ax}[[\gamma, \delta]]$.

Poursuite de modèle

Correcteur P pour atteindre une dynamique souhaitée G



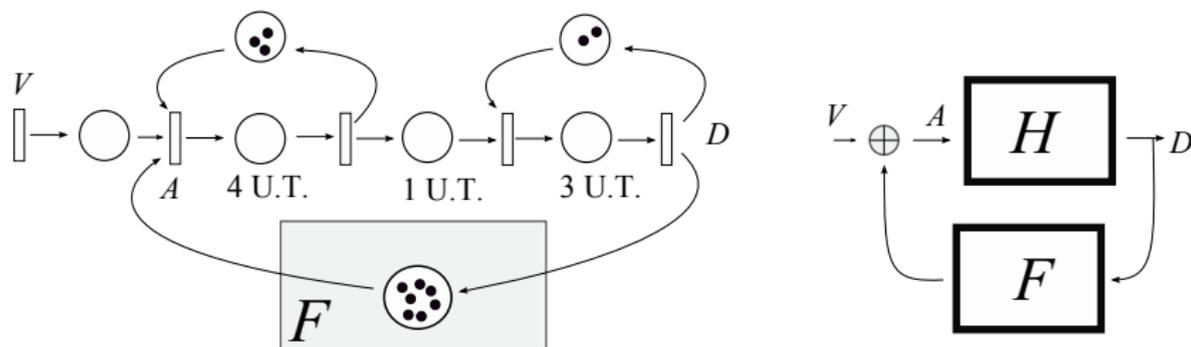
Système : $D = HA$

Système Corrigé : $D = HPV \approx GV$

Le correcteur P est un **filtre** visant à diminuer les congestions dans H (\searrow niveaux de stock, \searrow files d'attente).

Poursuite de modèle par feedback de sortie

Le contrôle de l'entrée est conditionné par la sortie.

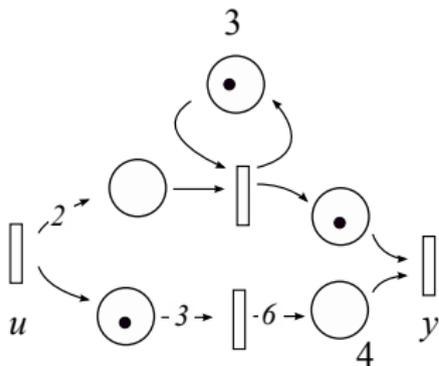


Système BO : $D = HA$ Système BF : $D = (HF)^* HV \approx GV$

Applications en production : contrôle comparable au Kanban

Objectif:

Mener l'étude de GET Valués (poids entiers sur les arcs) avec des outils analogues (modèle entrée-sortie, poursuite de modèle)



Les valuations décrivent des phénomènes supplémentaires

- **Batch** : création d'un lot. C'est une synchronisation entre des occurrences successives d'un même événement.
- **Unbatch** : multiplication d'événements.

- LIP6 (Kordon-Munier, Marchetti) : calcul de débit pour les GET Valués (applications en ordonnancement cyclique) ^{5 6}
Transformation d'un GET Valué → GET ordinaire
- G. Cohen, S. Hamaci : étude de GET avec multiplieurs (GET continus avec des poids) avec une approche (max,+) ^{7 8}
- Stuijk Geilen (Eindhoven) : Synchronous Dataflow Graphs (modèle équivalent aux GET valués) ^{9 10 11}

⁵ Benabid-Najjar Hanen Marchetti Munier-Kordon (2012) Periodic schedules for bounded timed weighted event graphs IEEE TAC

⁶ Marchetti Munier-Kordon (2010) Complexity results for weighted timed event graphs, Discrete Optimization

⁷ Cohen Gaubert Quadrat (1998) Timed-event graphs with multipliers and homogeneous min-plus systems IEEE TAC

⁸ Hamaci Boimond Lahaye (2006) Modeling and control of hybrid timed event graphs with multipliers using (min,+) algebra, DEDS

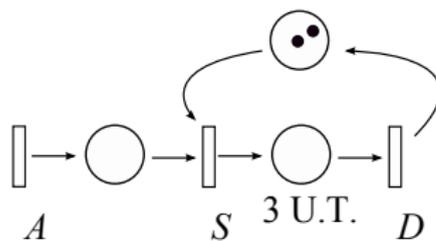
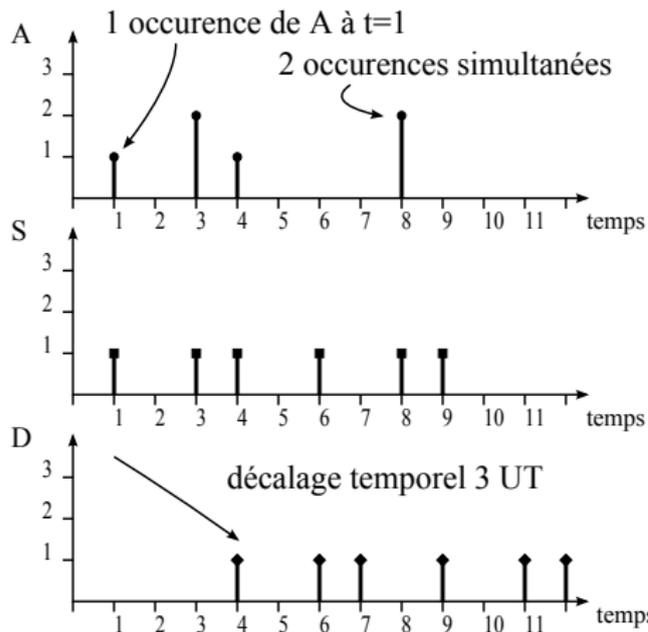
⁹ Stuijk Geilen Basten (2006) SDF3: SDF For Free. ACSD

¹⁰ Ghamarian Geilen Stuijk (2006) Throughput analysis of synchronous data flow graphs ACSD

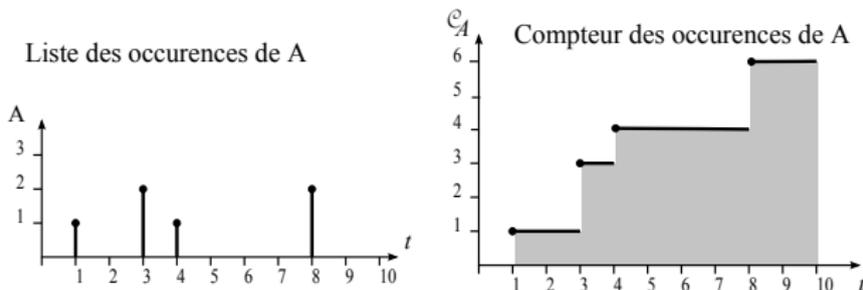
¹¹ de Groote Kuper Broersma Smit (2012) Max-plus algebraic throughput analysis of synchronous dataflow graphs 38th EUROMICRO

- 1 Introduction
- 2 Outils de modélisation
 - Compteur d'événements
 - Opérateurs
 - GET Valués et opérateurs
- 3 GET à Valuations Equilibrées
- 4 GET-VE et séries périodiques
- 5 Applications
- 6 Conclusion

Représentation des occurrences des événements dans le temps



Compteur : nombre cumulé d'occurrences



Fonction compteur associée à l'événement A:

$$C_A(t) : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}, t \mapsto \text{nombre d'occurrences de A jusqu'à } t$$

Les fonctions compteurs sont **monotones non-décroissantes**:

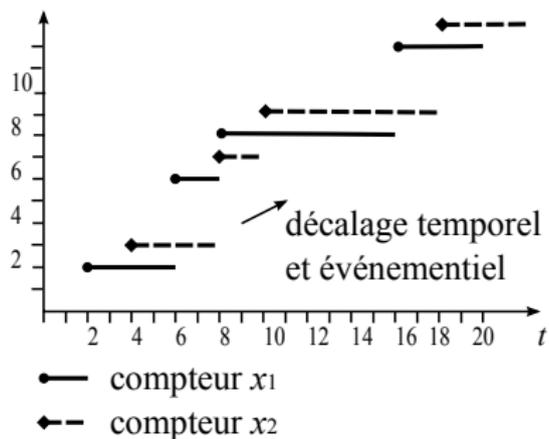
$$\forall t \in \mathbb{Z}, C_A(t+1) \geq C_A(t)$$

Dans cette approche, les compteurs sont **les signaux**.

Outils de modélisation : opérateurs

Σ : ensemble des compteurs.

Opérateur : application $h : \Sigma \rightarrow \Sigma$.

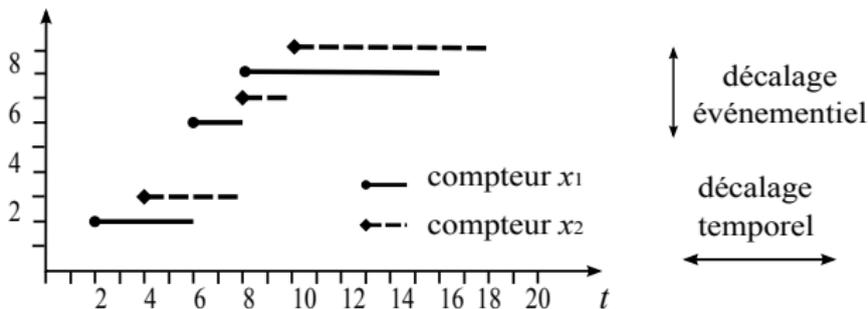


Opérateurs de décalage γ^n et δ^t

$x \in \Sigma$ fonction compteur

$$\gamma^\nu : x \mapsto \gamma^\nu x, \quad \{\forall t, (\gamma^\nu x)(t) = x(t) + \nu\}$$

$$\delta^\tau : x \mapsto \delta^\tau x, \quad \{\forall t, (\delta^\tau x)(t) = x(t - \tau)\}$$

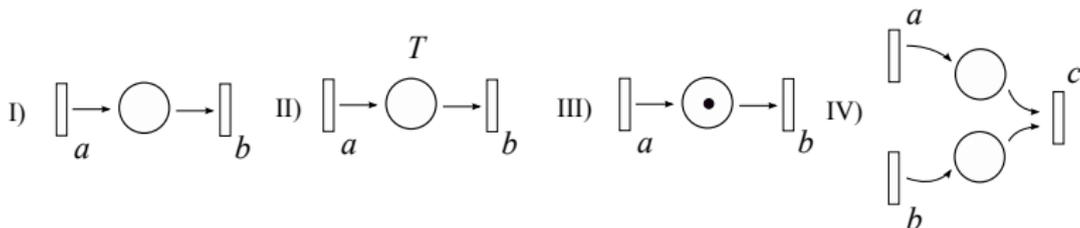


$$x_2 = \gamma^1(\delta^2 x_1) = \delta^2(\gamma^1 x_1) = (\gamma^1 \circ \delta^2)x_1 = (\delta^2 \circ \gamma^1)x_1$$

$$\forall t \in \mathbb{Z}, x_2(t) = x_1(t - 2) + 1$$

γ^ν et δ^τ commutent

Fonctionnement ASAP : les transitions sont franchies au plus tôt

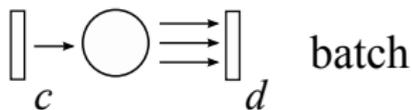
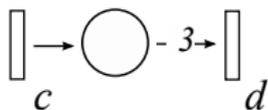
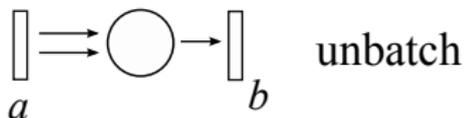
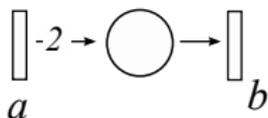


Les contraintes sous formes d'opérateurs

- I) **[simultanéité]** $\mathcal{C}_b = \gamma^0 \mathcal{C}_a = \delta^0 \mathcal{C}_a = e \mathcal{C}_a$ ($e = \gamma^0 = \delta^0$ est l'opérateur identité)
- II) **[décalage temporel]** $\mathcal{C}_b = \delta^T \mathcal{C}_a$
- III) **[décalage événementiel]** $\mathcal{C}_b = \gamma^1 \mathcal{C}_a$
- IV) **[synchronisation]** $\mathcal{C}_c = e \mathcal{C}_a \oplus e \mathcal{C}_b$ ($\oplus = \min$)

GET Valués

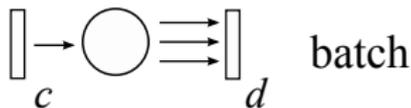
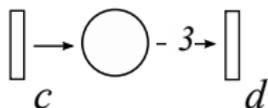
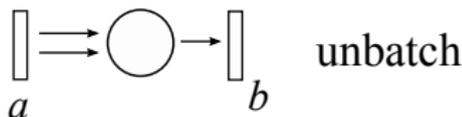
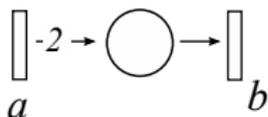
Les valuations décrivent une multiplication des arcs.



En fonctionnement ASAP,

un événement $a \rightarrow 2$ événements b

3 événements $c \rightarrow 1$ événement d



Représentation sur les compteurs

$$\mathcal{C}_b(t) = 2 \times \mathcal{C}_a(t) \quad (\text{unbatch})$$

$$\mathcal{C}_d(t) = \lfloor \mathcal{C}_c(t)/3 \rfloor \quad (\text{batch})$$

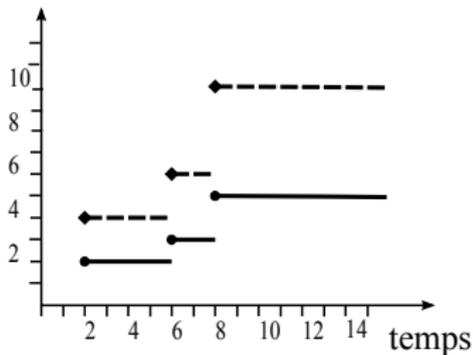
- **unbatch** \iff multiplication d'un compteur par un entier
- **batch** \iff division entière d'un compteur par un entier

Opérateurs pour modéliser les valuations

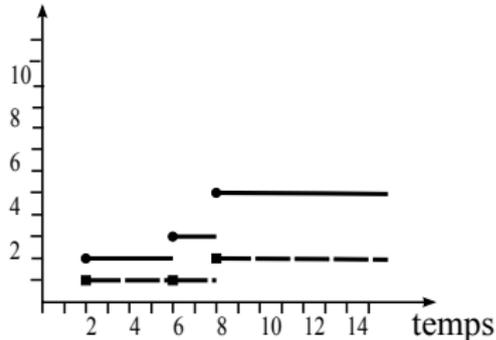
$$\begin{aligned} [\text{unbatch}] \quad \mu_m : x &\mapsto \mu_m x, & \{ \forall t, (\mu_m x)(t) &= x(t) \times m \} \\ [\text{batch}] \quad \beta_b : x &\mapsto \beta_b x, & \{ \forall t, (\beta_b x)(t) &= \lfloor x(t)/b \rfloor \} \end{aligned}$$

$$x_2 = \mu_2 x_1$$

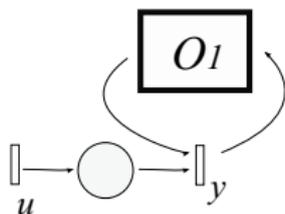
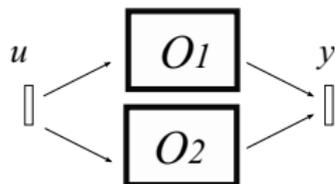
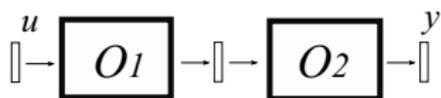
$$x_3 = \beta_2 x_1$$



—●— compteur x_1
- -◆- - compteur x_2



—●— compteur x_1
- -◆- - compteur x_2
- -■- - compteur x_3



Composition série

$$y = (O_2 \circ O_1)u$$

Composition parallèle (synchro)

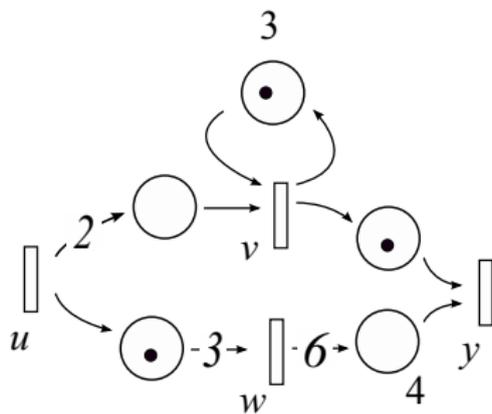
$$y = (O_1 \oplus O_2)u$$

Bouclage

$$y = O_1^*u$$

Tout GET Valué se ramène à une expression finie avec des \circ , \oplus , $*$ et des opérateurs $\{\gamma^\nu, \delta^\tau, \mu_m, \beta_b\}$ (expression rationnelle)

Transfert d'un GET Valué (ASAP)



$$w = \beta_3 \gamma^1 u$$

$$v = \mu_2 u \oplus \gamma^1 \delta^3 v \Rightarrow y = (\gamma^1 (\gamma^1 \delta^3)^* \mu_2 \oplus \delta^4 \mu_6 \beta_3 \gamma^1) u$$

$$y = \gamma^1 v \oplus \delta^4 \mu_6 w$$

Quid d'un outil de calcul pour les GET Valués ?

Peut-on automatiser les calculs sur des expressions rationnelles en $\{\gamma^v, \delta^r, \mu_m, \beta_b\}$?

- Le produit ne commute pas : la situation est différente de $\mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta]$

Exemple : $\mu_3\beta_4 \neq \beta_4\mu_3$



\Rightarrow difficile de traiter **tous** les GET Valués.

Cas des GET

opérateurs sur la clôture rationnelle^a de $\{\varepsilon, e, \gamma^1, \delta^1\}$.

⇒ Les expressions rationnelles ont une forme canonique (périodique)
(Gaubert (1992)).

^aexpression finie $\oplus, \otimes, *$ sur des éléments

Cas des GET Valués

opérateurs sur la clôture rationnelle de $\{\varepsilon, e, \gamma^1, \delta^1, \mu_2, \mu_3, \dots, \beta_2, \beta_3, \dots\}$.

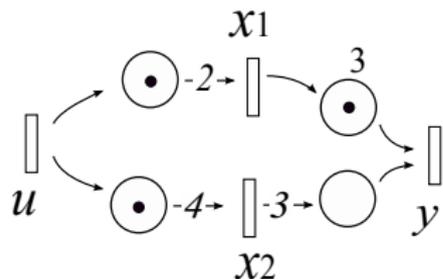
La non commutativité du produit compromet la possibilité d'obtenir une
forme canonique.

Vers une sous-classe de GET Valués ...

Définissons une sous-classe avec des contraintes sur les gains.

Gain Γ d'un chemin: produit des multiplicateurs divisé par le produit des diviseurs

Un événement en entrée produit Γ événements en sortie



Gain du chemin $u \rightarrow x_1 = 1/2$

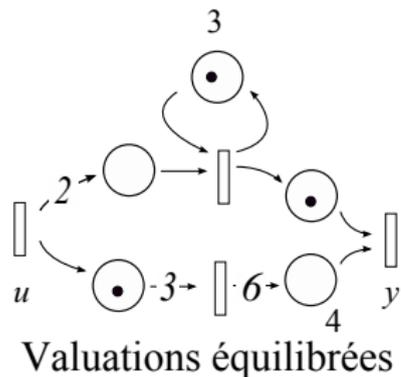
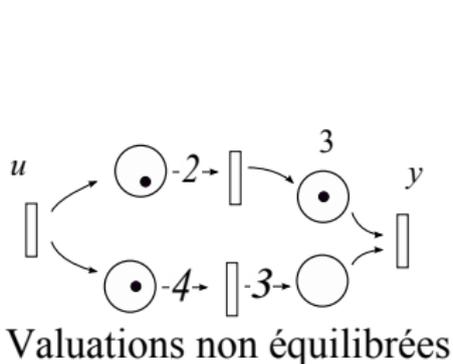
Gain du chemin $x_2 \rightarrow y = 3$

Gain du chemin $u \rightarrow x_1 \rightarrow y = 1/2$

Gain du chemin $u \rightarrow x_2 \rightarrow y = 3/4$

GET à Valuations Équilibrées (GET-VE)

Un GET est dit à **valuations équilibrées** (Weight-Balanced) si pour toute paire t_i, t_j , tous les chemins $t_i \rightarrow t_j$ ont le même gain.



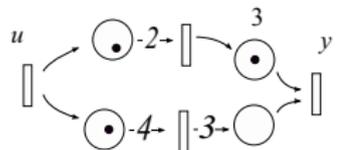
GET-VE seulement si les boucles ont un gain de 1.

GET à Valuations Équilibrées(GET-VE)

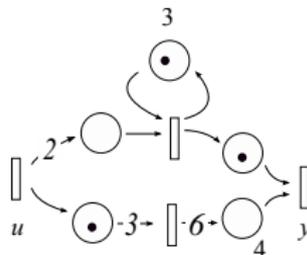
Gain d'un opérateur $\Gamma(h)$

Gain du GET-V équivalent.

Le somme $h_1 \oplus h_2$ est dite **équilibrée** si $\Gamma(h_1 \oplus h_2) = \Gamma(h_1) = \Gamma(h_2)$



Valuations non équilibrées



Valuations équilibrées

Exemple: $\Gamma(\delta^3\gamma^1\beta_2\gamma^1) = 1/2$, $\Gamma(\mu_3\beta_4\gamma^1) = 3/4$. La somme $\delta^3\gamma^1\beta_2\gamma^1 \oplus \mu_3\beta_4\gamma^1$ n'est pas équilibrée.

Représentation graphique des E-opérateurs

E-opérateurs : opérateurs obtenus pas sommes et produits de $\{\gamma^\nu, \mu_m, \beta_b\}$

Les E-opérateurs décrivent des **systemes instantanés**.

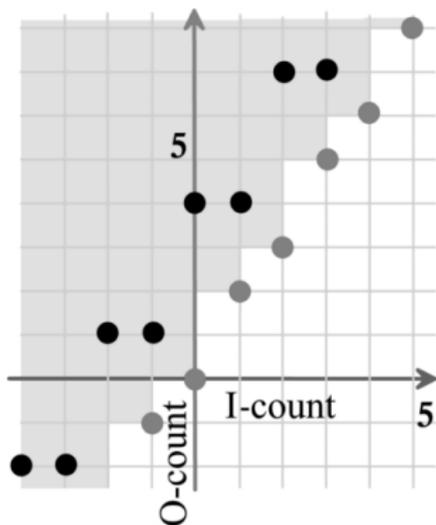
Fonction (Compteur/Compteur) associée $\mathcal{F} : k_i \mapsto k_o$, avec k_i : nombre d'entrées et k_o : nombre de sorties.

Exemple

$\mathcal{F}_{\beta_2\gamma^1\mu_3}$ et $\mathcal{F}_{\gamma^4\mu_3\beta_2}$ ci-contre

$$\mathcal{F}_{\beta_2\gamma^1\mu_3}(k_i) = \lfloor (k_i \times 3 + 1)/2 \rfloor$$

$$\mathcal{F}_{\gamma^4\mu_3\beta_2}(k_i) = \lfloor k_i/2 \rfloor \times 3 + 4$$

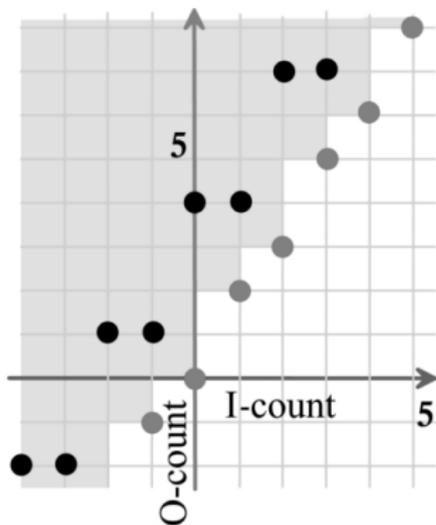


Représentation graphique des E-opérateurs

E-opérateurs des GET-VE \iff fonctions \mathcal{F} **périodiques**

Exemple: $\mathcal{F}_{\beta_2\gamma^1\mu_3}$ vérifie

$$\mathcal{F}_{\beta_2\gamma^1\mu_3}(k_i + 2) = \mathcal{F}_{\beta_2\gamma^1\mu_3}(k_i) + 3$$



Représentation des opérateurs des GET-VE

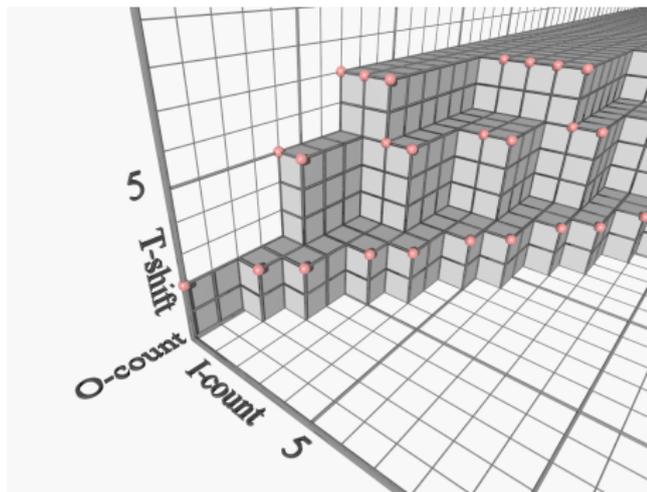
- δ^T commute avec n'importe quel E-opérateur
- le transfert d'un GET-VE peut se ramener à une série en δ

$$H = \bigoplus_i w_i \delta^{t_i} \text{ t.q. } \begin{array}{ll} w_i \in \mathcal{E} & [\text{coefficient}] \text{ E-opérateur périodique} \\ t_i \in \mathbb{Z} & [\text{exposant}] \end{array}$$

Représentation 3D

ci-contre, la représentation de

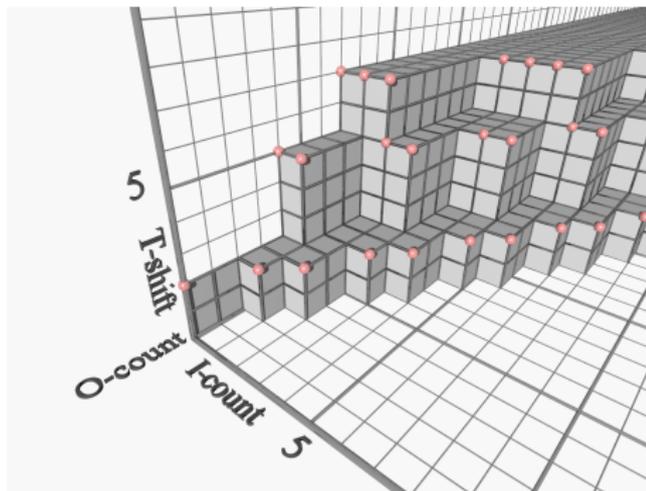
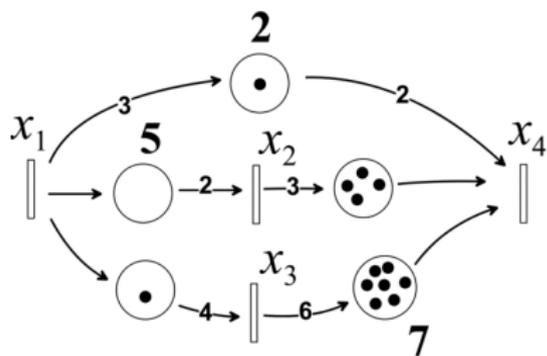
$$\beta_2 \gamma^1 \mu_3 \delta^2 \oplus \gamma^4 \mu_3 \beta_2 \delta^5 \oplus \gamma^7 \mu_6 \beta_4 \gamma^1 \delta^7$$



Représentation 3D des opérateurs des GET-VE

Exemple Le GET-VE ci-dessous admet

$\beta_2 \gamma^1 \mu_3 \delta^2 \oplus \gamma^4 \mu_3 \beta_2 \delta^5 \oplus \gamma^7 \mu_6 \beta_4 \gamma^1 \delta^7$ comme série de transfert.



Toute la dynamique du GET-VE est contenue dans la représentation 3D de la série de transfert.

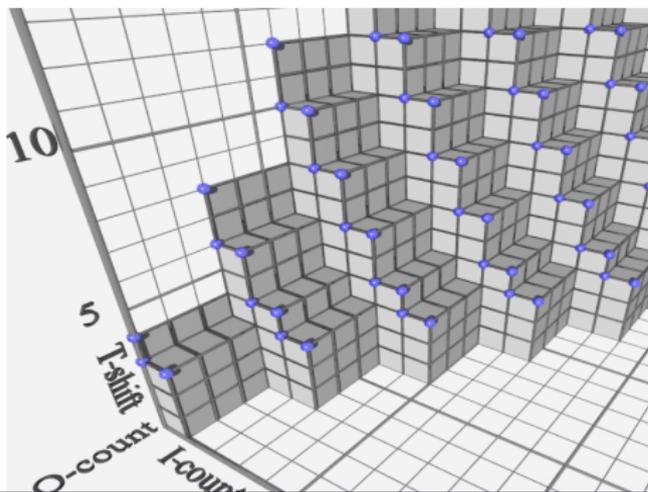
Séries (ultimement) périodiques

Proposition

Les séries de transferts des GET-VE sont (ultimement) périodiques^a.

^aCottenceau, Hardouin, Boimond (2014) Modeling and Control of Weight-Balanced Timed Event Graphs in Dioids, IEEE TAC

Exemple $H = \mu_3\beta_2\delta^3 \oplus \mu_3\beta_2\gamma^1\delta^4(\gamma^1\delta^2)^*$

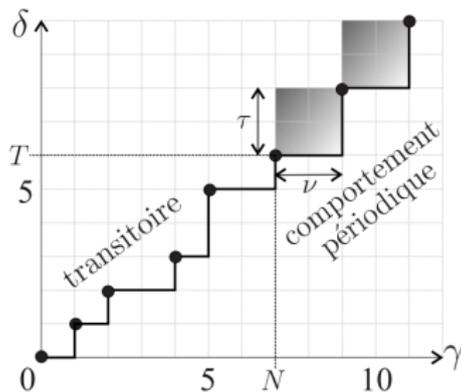


$$\begin{aligned} H = & \mu_3\beta_2\delta^3 \\ & \oplus \mu_3\beta_2\gamma^1\delta^4 \\ & \oplus \mu_3\beta_2\gamma^1\delta^4(\gamma^1\delta^2) \\ & \oplus \mu_3\beta_2\gamma^1\delta^4(\gamma^2\delta^4) \\ & \oplus \dots \end{aligned}$$

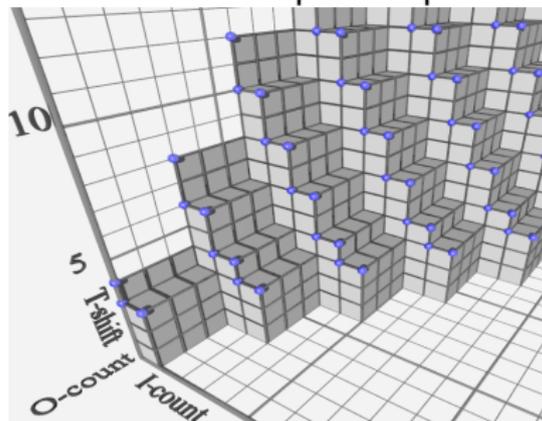
Séries périodiques et GET-VE

La classe des GET-VE est une extension des GET où les phénomènes périodiques sont prépondérants.

GET : series périodiques 2D



GET-VE : series périodiques 3D

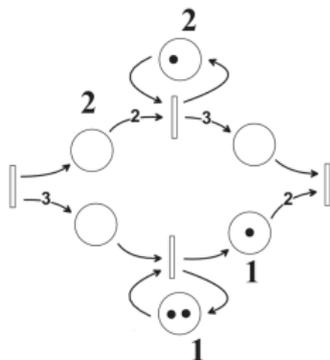


Application en Commande

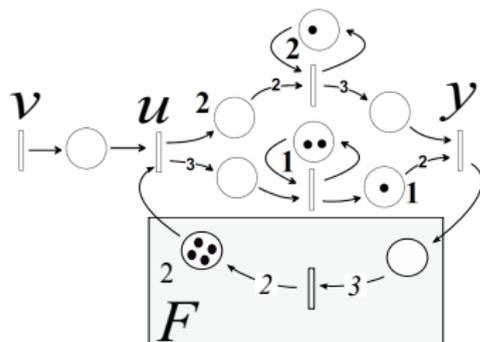
Les problèmes traités pour les GET s'étendent aux GET-VE.

Exemple de feedback de sortie

Le plus grand F tel que $(HF)^*H = H$ est $F = H \setminus H \phi H$.



$$H = p \oplus q(\gamma^2\delta^3)^*$$



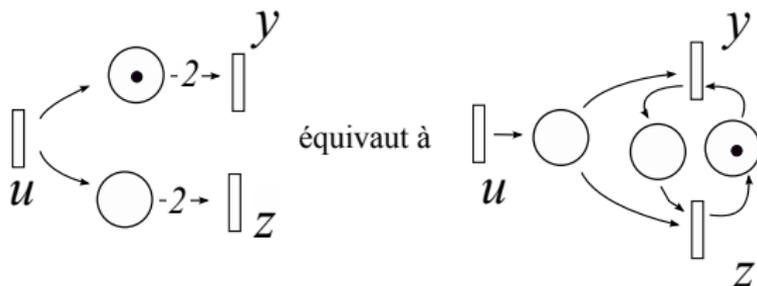
$$F = \gamma^4\mu_2\beta_3\delta^2$$

$$u = v \oplus Fy$$

$$u(t) = \min(v(t), \lfloor y(t-2)/3 \rfloor \times 2 + 4)$$

Les GET-VE permettent la description de certains **routages périodiques**.

Exemple : les occurrences paires $\rightarrow y$, les occurrences impaires $\rightarrow z$.

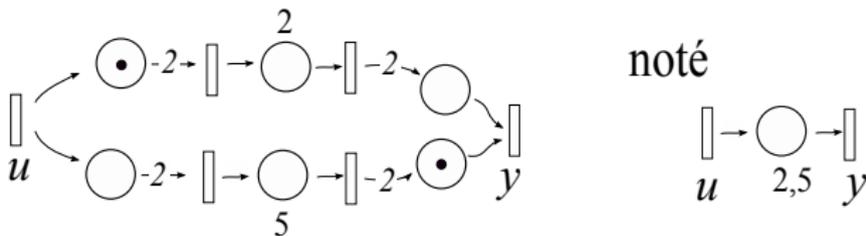


Pour ce routage on a : $y = \beta_2 \gamma^1 u$ et $z = \beta_2 u$.

Place avec un temps de séjour périodique

Cet aspect de modélisation a permis de revisiter un problème traité dans (Lahaye *et al* (2004))¹².

Exemple : le GET-VE décrit une durée qui alterne entre deux valeurs : 2 et 5. Equivaut à une place FIFO avec une temporisation variable.

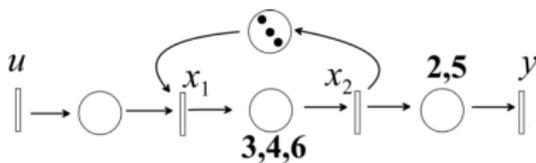


$$y = (\mu_2 \beta_2 \gamma^1 \delta^2 \oplus \gamma^1 \mu_2 \beta_2 \delta^5) u$$

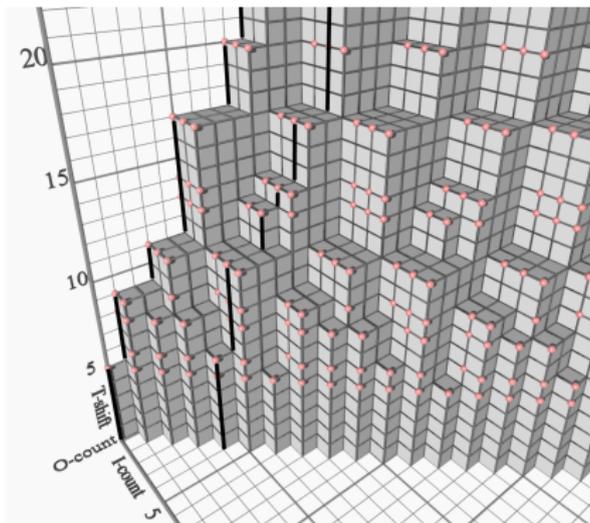
¹²Lahaye Boimond Hardouin (2004) Linear periodic systems over dioids, JDEDS

Place avec un temps de séjour périodique

Exemple GET avec des temps de séjour qui changent périodiquement



La représentation 3D du transfert



- Modèle entrée-sortie pour une sous-classe de GET Valués
- Les problèmes de commande traités pour les GET s'étendent aux GET-VE
- Certains phénomènes de routages peuvent être abordés

Perspectives

- Finaliser la librairie de calcul pour les GET-VE
- Complexité algorithmique/Taille des problèmes calculables
- Comparaison aux travaux sur les Synchronous Dataflow Graphs