Séminaire d'Analyse d'images de la SFR MathSTIC, Angers, 29 avril 2020.

Calcul quantique pour le traitement numérique des images

François Chapeau-Blondeau, Etienne Belin, LARIS, Université d'Angers.

En classique : chaque pixel a une adresse (x, y) sur $N_x + N_y$ bits et l'intensité $I(x, y)$ sur L bits.
Une image de $2^{N_x} \times 2^{N_y}$ pixels est donc codée par $2^{N_x} \times 2^{N_y}$ mots ou registres de L bits.
Par ex. avec $N_x = N_y = 10$ bits et $L = 8$ bits, une image de $1024 \times 1024 \approx 1$ Mpixel est codée par $\sim 10^6$ octets ou 8 Mbits.

En quantique : possibilité de coder l'image dans un état superposé

$$|\psi\rangle = \left(2^{N_x+N_y}\right)^{-1/2} \sum_{x\in\{0,1\}^{N_x}} \sum_{y\in\{0,1\}^{N_y}} |x, y\rangle \otimes \big|I(x, y)\big\rangle \,,$$

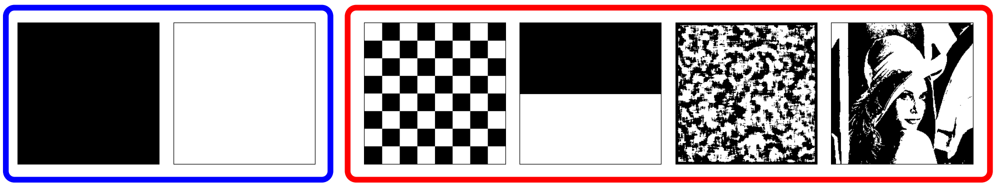
qui utilise un seul registre de $N_x + N_y + L = N_Q$ qubits au lieu des $2^{N_x} \times 2^{N_y} \times L$ bits.
Le registre $|\psi\rangle$ contient en superposition cohérente l'ensemble des adresses et des intensités de tous les pixels [1, 2].
Par ex. l'image de 1 Mpixel est codée par un unique registre-pixel de $N_Q = 28$ qubits.

- En traitant en quantique un unique registre-pixel, on réalise du traitement parallèle simultané (en superposition) de tous les pixels de l'image, via des opérateurs ou portes unitaires du quantique.
- Le calcul quantique devra délivrer son résultat via une mesure selon les principes quantiques : projection (aléatoire) de l'état du registre-pixel (ou un registre auxiliaire) sur un vecteur d'une base projective de l'espace de Hilbert de dim. 2^{N_Q}.

$\Longrightarrow$ 3 exemples ("académiques") illustrant la faisabilité de l'approche.

1. Classification d'images

Deux classes d'images binaires :
soit constantes,
soit équilibrées (autant de pixels à 0 qu'à 1).



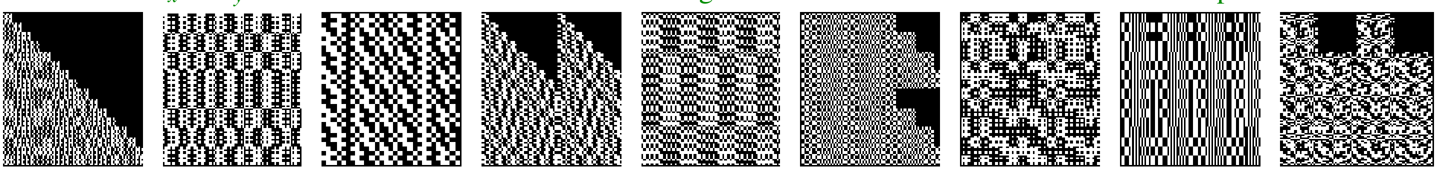
On peut placer le registre d'adresse $|x, y\rangle$ de taille $N_x + N_y$ qubits, couplé à un qubit auxilaire $|-\rangle$, dans l'état superposé

$$|\psi\rangle = \left(2^{N_x+N_y}\right)^{-1/2} \sum_{x\in\{0,1\}^{N_x}} \sum_{y\in\{0,1\}^{N_y}} (-1)^{I(x,y)} \, |x, y\rangle \otimes |-\rangle \,.$$

Sur ce registre-pixel de $N_x + N_y + 1$ qubits, un traitement inspiré de l'algorithme de Deutsch-Jozsa, implémentant une transformée de Hadamard suivie d'une mesure, permet de décider la classe, quelle que soit la taille $N_x \times N_y$ d'image [3, 4].
Une approche classique nécessiterait de mesurer / tester en moyenne un quart des pixels de l'image.

2. Identification d'un modèle d'images

Un modèle d'images binaires $I(x, y) = ax \oplus by \oplus c$ à trois paramètres : c sur 1 bit et a et b deux mots binaires de taille N_x et N_y. Ce modèle génère $2^{N_x+N_y+1}$ images binaires distinctes de taille $N_x \times N_y$ pixels.
Par ex. avec $N_x = N_y = 10$ bits on obtient $2^{21} \approx 2 \times 10^6$ images binaires distinctes de taille 1024×1024 pixels.



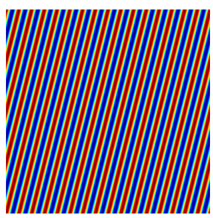
Sur un unique registre-pixel de $N_x + N_y + 1$ qubits, un traitement s'inspirant de l'algorithme quantique de Bernstein-Vazirani [5, 4], aboutit à une mesure quantique de cet unique registre-pixel, qui délivre la valeur du paramètrage (a, b, c).

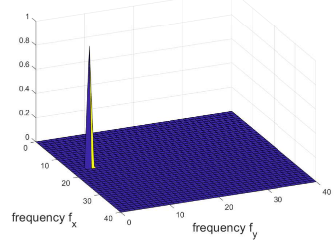
3. Détermination d'une périodicité 2D

Pour des images présentant une périodicité 2D, comme $I(x, y) = A \exp[i2\pi(x/f_x + y/f_y)]$, on peut préparer le registre d'adresse $|x, y\rangle$ de $N_x + N_y$ qubits dans l'état superposé

$$|\psi\rangle = \frac{1}{||I||} \sum_{x\in\{0,1\}^{N_x}} \sum_{y\in\{0,1\}^{N_y}} I(x, y)\, |x, y\rangle \,.$$

Une transformée de Fourier [6] de ce registre-pixel dans l'état $|\psi\rangle$ conduit à un état superposé dont les amplitudes de probabilité se concentrent au point (f_x, f_y), et dont la mesure fournit donc les deux fréquences (f_x, f_y) avec une probabilité 1.





[1] F. Yan, A. M. Iliyasu, S. E. Venegas-Andraca; "A survey of quantum image representations"; *Quantum Information Processing* 15 (2016) 1–35.
[2] F. Chapeau-Blondeau, E. Belin; "Quantum image coding with a reference-frame-independent scheme"; *Quantum Information Processing* 15 (2016) 2685–2700.
[3] D. Deutsch, R. Jozsa; "Rapid solution of problems by quantum computation"; *Proceedings of the Royal Society of London A* 439 (1992) 553–558.
[4] N. Gillard, E. Belin, F. Chapeau-Blondeau; "Digital image processing with quantum approaches"; *Lecture Notes in Computer Science*, LNCS 10884, pp. 360–369, Springer (Berlin) 2018.
[5] E. Bernstein, U. Vazirani; "Quantum complexity theory"; *SIAM Journal on Computing* 26 (1997) 1411–1473.
[6] M. A. Nielsen, I. L. Chuang; *Quantum Computation and Quantum Information*; Cambridge University Press, 2000.