Détection quantique en présence de bruit : analyse théorique et étude expérimentale sur un processeur quantique

François Chapeau-Blondeau, Nicolas Delanoue†

Laboratoire Angevin de Recherche en Ingénierie des Systèmes (LARIS), Université d'Angers.

Détection quantique : Signal quantique ≡ opérateur densité ρ sur espace de Hilbert complexe $\mathcal{H}$.
Deux préparations possibles $\rho = \rho_0$ ou $\rho = \rho_1$, avec les probabilités a priori P_0 ou $P_1 = 1 - P_0$.
Altération par un bruit quantique (décohérence) : $\rho \longmapsto \mathcal{N}(\rho)$ délivrant un signal quantique (opérateur densité) bruité $\mathcal{N}(\rho)$.

Détecteur mesure $\mathcal{N}(\rho)$ par 2 opérateurs de mesure $\{\mathsf{M}_0, \mathsf{M}_1\}$ décomposant l'identité de $\mathcal{H}$ via $\mathsf{M}_0 + \mathsf{M}_1 = \mathsf{Id}$.
Probabilité de décision $\Pr\{\mathsf{M}_k|\rho_j\} = \mathrm{tr}(\mathsf{M}_k\rho_j) \Longrightarrow$ probabilité d'erreur de détection $P_{\rm er} = \mathrm{tr}(\mathsf{M}_1\rho_0)P_0 + \mathrm{tr}(\mathsf{M}_0\rho_1)P_1$.

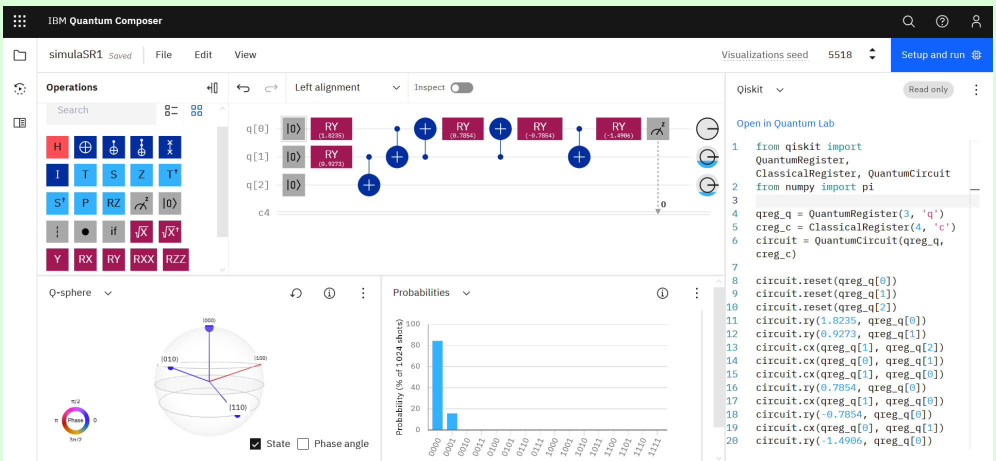
Détecteur optimal minimise $P_{\rm er}$ via l'opérateur de test $\mathsf{T} = P_1\mathcal{N}(\rho_1) - P_0\mathcal{N}(\rho_0)$
et $\mathsf{M}_1^{\rm opt}$ projecteur orthogonal sur le sous-espace propre des valeurs propres positives de T, et $\mathsf{M}_0^{\rm opt} = \mathsf{Id} - \mathsf{M}_1^{\rm opt}$,
atteint la probabilité d'erreur minimale $P_{\rm er}^{\rm min} = [1 - \mathrm{tr}(|\mathsf{T}|)]/2$.

Détection sur un qubit bruité :
Dans le plan $\mathcal{H}$, en représentation de Bloch, opérateur densité $\rho = (\mathsf{Id} + \vec{r}\cdot\vec{\sigma})/2$, de vecteur de Bloch $\vec{r} \in \mathbb{R}^3$.
Bruit thermique quantique : Transformation affine dans $\mathbb{R}^3$ à 2 paramètres $(p(T), \gamma)$ réalisant $\vec{r} \longmapsto A(\gamma)\vec{r} + (2p-1)\gamma\vec{e}_z$.
Opérateur de test $\mathsf{T} = [(P_1 - P_0)\mathsf{Id} + \vec{\tau}\cdot\vec{\sigma}]/2$ caractérisé par le vecteur de Bloch de test $\vec{\tau} = A(P_1\vec{r}_1 - P_0\vec{r}_0) + (P_1 - P_0)(2p-1)\gamma\vec{e}_z$,
à 2 valeurs propres $\lambda_\pm = (P_1 - P_0 \pm \|\vec{\tau}\|)/2$, et 2 états propres orthogonaux $|\lambda_\pm\rangle$ de vecteurs de Bloch $\pm\vec{\tau}/\|\vec{\tau}\|$.
Le détecteur optimal $\{\mathsf{M}_0^{\rm opt}, \mathsf{M}_1^{\rm opt}\}$ atteint la probabilité d'erreur minimale $P_{\rm er}^{\rm min} = (1 - \|\vec{\tau}\|)/2$.

Processeur quantique :

Utilisable en ligne sur :

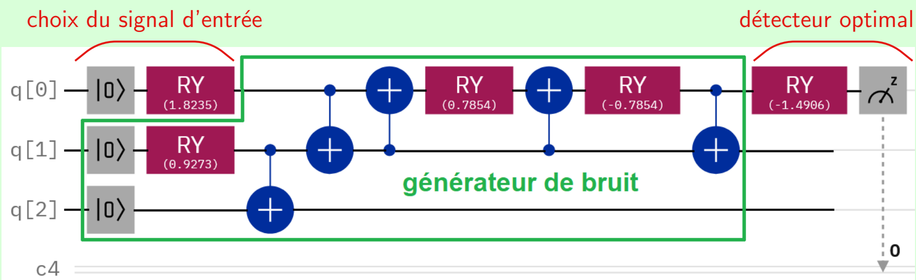
IBM Quantum Computing Platform
`https://quantum-computing.ibm.com`

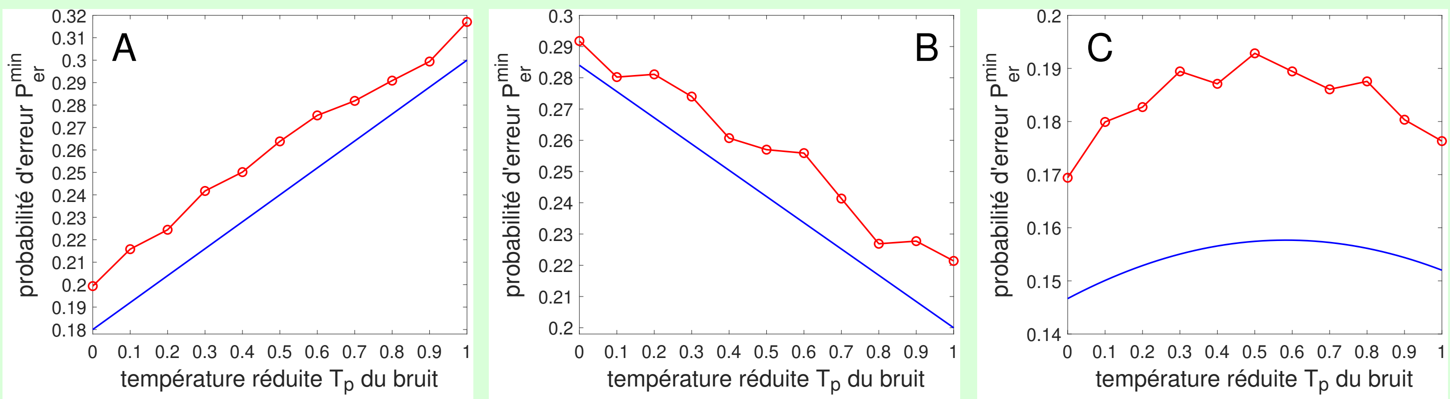


Entrée : 2 états purs $\perp$: $\{|\psi_0\rangle, |\psi_1\rangle\}$.

Bruit : $(p(T), \gamma)$ contrôlables.

Évaluation expérimentale de $P_{\rm er}^{\rm min}$.





(A) avec $P_0 = 0.3$, $\vec{r}_1 = [0, 0, 1]^\top = \vec{e}_z = -\vec{r}_0$ et $\gamma = 0.6$; (B) avec $P_0 = 0.3$, $\vec{r}_1 = [0, 0, -1]^\top = -\vec{e}_z = -\vec{r}_0$ et $\gamma = 0.4$;
(C) avec $P_0 = 0.2$, $\vec{r}_1 = [\sqrt{1 - 0.25^2}, 0, -0.25]^\top = -\vec{r}_0$ et $\gamma = 0.5$.

On vérifie 3 régimes d'évolution de la performance $P_{\rm er}^{\rm min}$ avec l'augmentation de la température de bruit, comme prévu dans [1].

[1] N. Gillard, E. Belin, F. Chapeau-Blondeau, "Qubit state detection and enhancement by quantum thermal noise," *Electronics Letters*, vol. 54, pp. 38–39, 2018.