

# Transformée de Fourier et traitement du signal quantique

François CHAPEAU-BLONDEAU, Étienne BELIN

Laboratoire Angevin de Recherche en Ingénierie des Systèmes (LARIS),  
Université d'Angers, 62 avenue Notre Dame du Lac, 49000 Angers, France.  
chapeau@univ-angers.fr, etienne.belin@univ-angers.fr

**Résumé** – Nous montrons comment l’outil fondamental du traitement du signal classique constitué par la transformée de Fourier (TF), est aussi bien exploitable pour le traitement du signal quantique, et contribue ainsi aux développements en cours dans le domaine de l’information quantique. En quantique, une application privilégiée de la TF concerne l’estimation de phase, qui notamment joue un rôle clé dans l’algorithme de factorisation de Shor. Nous traitons ici un problème exploitant la TF pour l’estimation de phase quantique. Nous montrons en particulier comment la TF opérant sur des états quantiques intriqués permet d’obtenir des performances accrues inaccessibles en classique. Nous examinons également l’effet du bruit ou de la décohérence quantique sur la performance de l’estimation par TF.

**Abstract** – We show how the tool, fundamental to classical signal processing, provided by the Fourier transform (FT), can as well be exploited for quantum signal processing, thereby contributing to the ongoing progress in the field of quantum information. In the quantum domain, a prominent application for the FT concerns phase estimation, especially playing a key role in the Shor factoring algorithm. Here we address a problem exploiting the FT for quantum phase estimation. We show in particular how the FT operating on entangled quantum states leads to enhanced performance unreachable by classical means. We also study the effect of noise or quantum decoherence on the performance of the FT-based estimation.

## 1 Introduction

Les développements actuels liés au domaine de l’information quantique mettent en œuvre les propriétés et phénomènes spécifiquement quantiques afin de contribuer au traitement de l’information. Le traitement du signal, avec ses problématiques et ses concepts constitutifs, peut se retrouver aussi bien à ce niveau quantique, et ainsi prendre part aux développements en cours. Dans le contexte des colloques Gresti, nous avons abordé des problématiques structurantes du traitement du signal, comme la détection [1] ou l’estimation [2] sur des signaux bruités, et opérant dans un cadre quantique. Nous allons montrer ici comment l’outil essentiel constitué par la transformée de Fourier (TF) est également exploitable en quantique. Il existe bien sûr une forte parenté entre la TF en classique et en quantique. Toutefois, si connaître c’est distinguer, et si l’on veut particulariser leur usage respectif, il serait possible de le faire ainsi. Les états quantiques – qui constituent les signaux porteurs d’information – sont des états normalisés, et le demeurent dans toute évolution quantique valide. Ainsi, en quantique, schématiquement, il n’y a pas d’emblée de large applicabilité aux traitements d’amplitude ; par contre les traitements de phase sont primordiaux. La phase, ou les phases relatives, dans les états quantiques, déterminent leurs propriétés de cohérence, d’interférence, d’interaction, et ainsi des capacités spécifiques essentielles au traitement de l’information. Aussi, l’usage de la TF en quantique peut être vu comme pour accomplir de façon privilégiée des traitements de phase ; alors qu’en classique, l’usage plus standard et l’intuition qui l’accompagne serait plutôt pour des traitements d’amplitude.

La TF en quantique fournit des méthodes efficaces d’estimation de phase, elle sert ainsi à résoudre efficacement des problèmes primordiaux comme la détermination de l’ordre d’un entier en arithmétique modulaire, et elle représente ainsi l’étape cruciale de l’algorithme quantique de Shor qui permet la factorisation des entiers en complexité polynomiale, alors que les méthodes classiques connues à ce jour restent à complexité exponentielle [3]. On peut ainsi attribuer à la TF quantique le rôle clé, via l’estimation de phase, dans l’algorithme de factorisation de Shor emblématique de l’apport spécifique du quantique au traitement de l’information.

Nous abordons ici la TF quantique et son application à l’estimation de phase. Nous développons une approche où la TF opère en présence d’intrication quantique, ce qui permet d’atteindre des performances accrues inaccessibles en classique. Nous incluons également dans l’analyse, un élément qui est très commun en traitement du signal classique, mais beaucoup moins en quantique au stade où en sont les avancées, qui est la prise en compte du bruit ou de la décohérence quantique.

## 2 Transformée de Fourier quantique

Nous considérons les états quantiques dans un espace de Hilbert  $\mathcal{H}_N$  de dimension  $N$  sur  $\mathbb{C}$ , selon les principes de [3, 1, 2]. Une base orthonormée de  $\mathcal{H}_N$  est formée par l’ensemble des  $N$  vecteurs d’état  $|j\rangle \in \{|0\rangle, |1\rangle, \dots, |N-1\rangle\}$  possédant la TF

$$|j\rangle \mapsto |\tilde{j}\rangle = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N-1} \exp\left(i2\pi \frac{jk}{N}\right) |k\rangle. \quad (1)$$

L’ensemble des  $N$  vecteurs  $\{|\tilde{j}\rangle\} = \{|\tilde{0}\rangle, |\tilde{1}\rangle, \dots, |\tilde{N-1}\rangle\}$  résultant de l’Éq. (1) pour  $j = 0$  à  $N-1$ , forme une autre base orthonormée de  $\mathcal{H}_N$ . Les deux bases sont reliées par  $|\tilde{j}\rangle = U_F |j\rangle$  via la matrice  $N \times N$  symétrique unitaire  $U_F$  de terme générique  $[\exp(i2\pi jk/N)]/\sqrt{N}$ .

La TF inverse est définie par

$$|\tilde{j}\rangle \mapsto |j\rangle = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N-1} \exp\left(-i2\pi \frac{jk}{N}\right) |\tilde{k}\rangle, \quad (2)$$

ou bien  $|j\rangle = U_F^\dagger |\tilde{j}\rangle$  car  $U_F^{-1} = U_F^\dagger$  la matrice adjointe.

La TF de l’Éq. (1) est ainsi définie via une matrice de changement de base  $U_F$  qui s’écrit avec  $+i = \sqrt{-1}$  comme c’est usuel ; la matrice de changement de coordonnées associée est l’adjointe  $U_F^\dagger$  et s’écrit avec  $-i$ , ce qui est encore davantage usuel, en classique pour une TF.

Pour le calcul quantique, les états quantiques sont souvent constitués à partir d’un système élémentaire – le qubit ou bit quantique. Le qubit est un système quantique à deux états de base (comme les deux états de polarisation d’un photon ou de spin d’un électron) existant dans  $\mathcal{H}_2$  rapporté à la base orthonormée canonique  $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ , avec les vecteurs d’état  $|0\rangle = [1, 0]^T$  et  $|1\rangle = [0, 1]^T$  de  $\mathcal{H}_2$ . En assemblant  $L$  qubits, on

forme un système composite de  $L$  qubits dont l'état quantique conjoint appartient à l'espace produit tensoriel  $\mathcal{H}_N = \mathcal{H}_2^{\otimes L}$  de dimension  $N = 2^L$ , rapporté à la base orthonormée  $\{|0 \dots 0\rangle, \{|0 \dots 1\rangle, \dots, |1 \dots 1\rangle\}$  où les  $N = 2^L$  vecteurs de base  $|j\rangle$  sont repérés par un mot binaire de  $L$  bits.

### 3 TF et estimation de phase quantique

Pour formuler une problématique d'estimation de phase, nous considérons un processus quantique opérant sur le qubit (bien que l'approche puisse être étendue au delà) et représenté par l'opérateur unitaire

$$U_\xi = |0\rangle\langle 0| + e^{i2\pi\xi} |1\rangle\langle 1| = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i2\pi\xi} \end{bmatrix}, \quad (3)$$

qui laisse donc invariant l'état de base  $|0\rangle$ , i.e.  $U_\xi |0\rangle = |0\rangle$ , et ajoute une phase complexe via  $e^{i2\pi\xi}$  à l'état de base  $|1\rangle$ , i.e.  $U_\xi |1\rangle = e^{i2\pi\xi} |1\rangle$ . Il s'agit d'une opération qui peut être accomplie par un interféromètre optique, qui pour un photon à deux états de polarisation, laisse invariant un état de polarisation  $|0\rangle$  de référence et ajoute un déphasage de  $2\pi\xi \in [0, 2\pi[$  sur l'autre état de polarisation  $|1\rangle$  — donc de l'interférométrie opérant au niveau fondamental de photons individuels. On veut alors estimer le déphasage  $\xi \in [0, 1[$  du processus  $U_\xi$  ou de l'interféromètre. On vise donc ce que l'on peut apparenter, comme en théorie classique des signaux-systèmes, à une tâche d'identification d'un système linéaire, entreprise comme en représentation fréquentielle donc via la TF.

Pour commencer, afin d'élaborer un signal d'excitation efficace, on considère des états quantiques à  $N-1$  qubits ( $N \geq 2$ ), notés  $|\bar{k}\rangle$ , et formés avec les  $k$  premiers qubits dans l'état  $|1\rangle$  et les qubits restant dans l'état  $|0\rangle$ , selon

$$|\bar{k}\rangle = \underbrace{|0\rangle \dots |0\rangle}_{N-1-k} \underbrace{|1\rangle \dots |1\rangle}_k = \underbrace{|0 \dots 0}_{N-1-k} \underbrace{1 \dots 1}_k \rangle. \quad (4)$$

L'ensemble des  $N$  états  $\{|\bar{k}\rangle\}$ , pour  $k = 0$  à  $N-1$ , forme une base orthonormée d'un sous-espace  $\mathcal{H}'_N$  de dimension  $N$  de l'espace de Hilbert  $\mathcal{H}_{2^{N-1}} = \mathcal{H}_2^{\otimes(N-1)}$  de dimension  $2^{N-1}$  des  $N-1$  qubits. Les traitements à venir maintiendront les états quantiques dans  $\mathcal{H}'_N$  ainsi établi comme l'espace de Hilbert de travail.

Quand les  $N-1$  qubits préparés dans l'état conjoint  $|\bar{k}\rangle$  sont successivement appliqués en entrée du processus  $U_\xi$  de l'Éq. (3), on obtient en sortie un état à  $N-1$  qubits résultant de la transformation

$$|\bar{k}\rangle \mapsto U_\xi^{(N-1)} |\bar{k}\rangle = \exp(i2\pi k\xi) |\bar{k}\rangle. \quad (5)$$

La superposition quantique permet de placer les  $N-1$  qubits d'entrée dans un état superposé

$$|\psi_{\text{in}}\rangle = \sum_{k=0}^{N-1} a_k |\bar{k}\rangle, \quad (6)$$

avec les coefficients  $a_k \in \mathbb{C}$  normalisés par  $\sum_{k=0}^{N-1} |a_k|^2 = 1$ . Ce signal d'excitation  $|\psi_{\text{in}}\rangle \in \mathcal{H}'_N$  produit alors la transformation entrée-sortie

$$|\psi_{\text{in}}\rangle \mapsto \sum_{k=0}^{N-1} a_k \exp\left(i2\pi \frac{j_\xi k}{N}\right) |\bar{k}\rangle = |\tilde{\psi}_\xi\rangle, \quad (7)$$

avec  $j_\xi = N\xi$ .

Pour traiter l'état de sortie  $|\tilde{\psi}_\xi\rangle \in \mathcal{H}'_N$  de l'Éq. (7) en vue d'estimer la phase  $\xi$ , on applique une TF inverse référée à la base  $\{|\bar{k}\rangle\}$  de  $\mathcal{H}'_N$ , selon l'Éq. (2) qui donne

$$U_F^\dagger |\tilde{\psi}_\xi\rangle = |\psi_\xi\rangle = \sum_{j=0}^{N-1} a'_j |\bar{j}\rangle, \quad (8)$$

avec les coefficients

$$a'_j = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N-1} a_k \exp\left(i2\pi \frac{(j_\xi - j)k}{N}\right). \quad (9)$$

Avec dans l'Éq. (6) une superposition d'entrée uniforme où les  $a_k = 1/\sqrt{N}$ , et une phase  $\xi \in [0, 1[$  inconnue donnant  $j_\xi = N\xi = j_0$  précisément un entier  $j_0 \in [0, N[$ , on aurait  $a'_j = \delta_{jj_0}$  et  $|\psi_\xi\rangle = |\bar{j}_0\rangle$  dans l'Éq. (8). En mesurant  $|\psi_\xi\rangle$  on a ainsi la possibilité de connaître précisément la phase  $\xi = j_0/N$ . Dans le cas générique d'une phase  $\xi$  avec  $j_\xi = N\xi$  non entier, on a, comme on va le voir, la possibilité de connaître  $\xi$  avec une bonne précision à la résolution  $1/N$ .

Pour l'état  $|\psi_\xi\rangle \in \mathcal{H}'_N$  à  $N-1$  qubits de l'Éq. (8), on envisage une mesure quantique consistant à projeter l'état  $|\psi_\xi\rangle$  dans la base orthonormée des  $N$  états  $\{|\bar{k}\rangle\}$  de l'Éq. (4). Conformément à la théorie quantique [3], où la mesure présente un caractère probabiliste inhérent ("God plays dice"), on a alors la probabilité  $P_j = |a'_j|^2$  de mesurer (projeter) l'état  $|\psi_\xi\rangle$  sur le vecteur de base  $|\bar{j}\rangle$ , pour  $j = 0$  à  $N-1$ . On peut noter aussi que puisque les états de base  $|\bar{k}\rangle$  de l'Éq. (4) sont des états séparables (non intriqués) [3], la mesure de l'état  $|\psi_\xi\rangle$  à  $N-1$  qubits peut en pratique se réaliser en mesurant chacun de ces  $N-1$  qubits séparément, par projection dans la base  $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ , puis en comptant le nombre  $j$  de qubits mesurés sur  $|1\rangle$ .

Pour un  $j$  donné délivré par la mesure, on estime<sup>1</sup> alors la phase par l'estimateur  $\hat{\xi} = j/N$ . On accède alors à l'erreur quadratique moyenne d'estimation  $e^2(\hat{\xi}) = \langle (\hat{\xi} - \xi)^2 \rangle = \sum_{j=0}^{N-1} (\xi - j/N)^2 P_j$ , ou bien, dans ce contexte avec une périodicité selon la phase  $\xi$ , et pour faciliter les calculs théoriques, il est commun [4] de considérer l'erreur alternative

$$e_s^2(\hat{\xi}) = \frac{1}{\pi^2} \langle \sin^2[\pi(\hat{\xi} - \xi)] \rangle, \quad (10)$$

qui dans le régime des erreurs faibles coïncide avec  $e^2(\hat{\xi})$ .

Dans le cas de l'entrée uniforme où les  $a_k = 1/\sqrt{N}$ , on peut alors calculer que

$$e_s^2(\hat{\xi}) = \frac{1}{\pi^2 N} \sin^2(\pi N\xi). \quad (11)$$

On retrouve bien en particulier l'erreur nulle escomptée quand  $N\xi = j_0$  entier. Aussi, quand la résolution  $N$  est grande, l'erreur  $e_s^2$  est faible et  $e^2(\hat{\xi}) \approx e_s^2(\hat{\xi})$ . Dans ce régime on a alors une évolution générique de l'erreur quadratique moyenne d'estimation en  $e^2(\hat{\xi}) \sim 1/N$ , obtenue par une excitation à  $\sim N$  qubits accomplissant  $\sim N$  évaluations du processus  $U_\xi$  à estimer. On dispose ainsi d'un protocole exploitant la TF quantique, et qui en mesurant  $N$  qubits séparément, permet une estimation de phase avec une erreur quadratique décroissant en  $1/N$  — une performance analogue à ce qui peut être escompté en estimation statistique classique. En quantique il est néanmoins possible de faire mieux, et d'atteindre une performance d'estimation accrue inaccessible en classique.

### 4 Avec de l'intrication quantique

Le signal d'excitation  $|\psi_{\text{in}}\rangle$  à  $N-1$  qubits de l'Éq. (6) constitue en général un état intriqué (non factorisable en produit tensoriel d'états à un qubit), et il est possible de chercher à optimiser l'intrication via les  $a_k$ , au delà de simples  $a_k = 1/\sqrt{N}$  uniformes. L'erreur d'estimation  $e_s^2(\hat{\xi})$  de l'Éq. (10) peut être explicitement calculée avec des  $a_k$  quelconques, afin de rechercher les  $a_k$  minimisant  $e_s^2(\hat{\xi})$ . On trouve alors que des  $a_k \in \mathbb{R}$

1. Pour un  $j$  donné la probabilité  $P_j = |a'_j|^2$  résultant de l'Éq. (9) vue comme une fonction de  $\xi$  représente la vraisemblance, et maximisée par  $\xi = j/N$  elle établit  $\hat{\xi} = j/N$  comme l'estimateur du maximum de vraisemblance.

réels suffisent, que le choix  $a_0 = 0$  permet d'obtenir la propriété intéressante d'une erreur  $e_s^2(\hat{\xi})$  indépendante de  $\xi$ , et qui s'établit comme

$$e_s^2(\hat{\xi}) = \frac{1}{2\pi^2} \left( 1 - \sum_{k=1}^{N-2} |a_k| |a_{k+1}| \right), \quad (12)$$

et dont la minimisation, sous la contrainte de normalisation des  $a_k$ , est accomplie par

$$a_k = \sqrt{\frac{2}{N}} \sin\left(\pi \frac{k}{N}\right), \quad k = 0, 1, \dots, N-1. \quad (13)$$

Avec la distribution optimale des  $a_k$  de l'Éq. (13), on peut réévaluer via l'Éq. (9) les probabilités  $P_j = |a'_j|^2$ , puis l'erreur  $e_s^2(\hat{\xi})$  de l'Éq. (10) qui atteint le minimum

$$e_s^2(\hat{\xi}) = \frac{1}{\pi^2} \sin^2\left(\frac{\pi}{2N}\right). \quad (14)$$

Quand la résolution  $N$  de l'estimation est grande, l'erreur  $e_s^2$  est faible et l'on obtient l'erreur quadratique moyenne d'estimation  $e^2(\hat{\xi}) \approx e_s^2(\hat{\xi}) \approx 1/(4N^2)$ . Ainsi, en mesurant  $N-1$  qubits préparés dans l'état d'entrée  $|\psi_{\text{in}}\rangle$  optimalement intriqué selon l'Éq. (13), on obtient une erreur quadratique moyenne d'estimation  $e^2(\hat{\xi}) \sim 1/N^2$ . Une telle erreur quadratique d'estimation qui décroît en  $1/N^2$  constitue un bénéfice purement quantique, inaccessible en classique où l'erreur quadratique diminue moins vite en  $1/N$ . En classique, introduire des corrélations via le signal d'excitation dans les  $N$  mesures successives, revient à introduire de la redondance dans les mesures qui n'est pas de nature (au contraire) à améliorer l'erreur d'une décroissance en  $1/N$  à  $1/N^2$ . Le peuvent au contraire les corrélations quantiques, de nature radicalement différentes, associées à l'intrication. Pour la métrologie et l'estimation, les bénéfices de l'intrication quantique sont abordés dans [5, 6, 7], ou dans [8, 2] pour la résistance au bruit ; ils ne sont cependant pas accessibles dans toutes les conditions, mais sont présents ici pour l'estimation de phase par TF.

L'application de la TF quantique pour l'estimation de phase, telle que proposée originellement [9, 3], n'exploite pas l'intrication dans l'excitation d'entrée, et donc elle atteint une erreur quadratique décroissant en  $1/N$  plutôt qu'en  $1/N^2$ . L'extension abordée dans [4] exploite la TF en présence d'intrication dans l'excitation d'entrée, optimisée également selon l'Éq. (13), pour ainsi atteindre une erreur quadratique décroissant en  $1/N^2$ . Toutefois [4] utilise un état intriqué d'entrée plus compliqué que l'état  $|\psi_{\text{in}}\rangle$  de l'Éq. (6). Ici nous utilisons une base d'états  $\{|\bar{k}\rangle\}$  de l'Éq. (4) plus simple pour former la superposition d'entrée  $|\psi_{\text{in}}\rangle$  de l'Éq. (6), pour atteindre la même performance, et via un procédé séquentiel simple ou chaque qubit de l'état d'entrée intriqué à  $N-1$  qubits est appliqué séparément sur le processus  $U_\xi$  à estimer puis mesuré séparément. De plus, notre approche excitant avec  $|\psi_{\text{in}}\rangle$  de l'Éq. (6) permet d'aborder analytiquement un aspect d'intérêt encore plus récent, qui est l'étude de l'impact du bruit quantique sur l'estimation par TF.

## 5 Avec du bruit quantique

Parmi les bruits quantiques qui peuvent affecter le qubit, traduisant le phénomène de décohérence, un modèle fondamental est constitué par le bruit de phase-flip. Il s'agit d'un modèle de bruit fréquemment pertinent affectant la phase quantique, capable de décrire par exemple pour des photons des effets d'amortissement de phase (phase damping) ou de diffusion aléatoire lors de leur propagation, ou bien la perturbation d'états électroniques via le couplage avec des charges

électroniques distantes [3]. Il est spécialement pertinent dans le contexte de notre étude où l'on traite une information de phase. Le bruit de phase-flip appliqué à un qubit dans l'état générique  $|\phi\rangle = \alpha_0|0\rangle + \alpha_1|1\rangle \in \mathcal{H}_2$  a pour effet de renverser la phase relative des deux coordonnées dans  $\mathbb{C}$  pour produire l'état  $\alpha_0|0\rangle - \alpha_1|1\rangle$  avec une probabilité  $p$ , alors que l'état reste inchangé avec la probabilité  $1-p$ . Un tel renversement de phase peut se formaliser avec l'opérateur unitaire de Pauli  $\sigma_z = |0\rangle\langle 0| - |1\rangle\langle 1|$  qui agit dans  $\mathcal{H}_2$ . Ainsi, avec la probabilité  $p$  l'état  $|\phi\rangle$  est remplacé par l'état  $\sigma_z|\phi\rangle$ . L'état initial  $|\phi\rangle$ , qui était un état pur, par l'action du bruit devient un état mélangé, équivalent à un ensemble statistique de deux états  $\{(|\phi\rangle, 1-p), (\sigma_z|\phi\rangle, p)\}$ , l'état  $|\phi\rangle$  avec la probabilité  $1-p$  et l'état  $\sigma_z|\phi\rangle$  avec la probabilité  $p$ . Les statistiques de mesure issues d'un tel état mélangé peuvent être décrites par un opérateur densité  $\rho = (1-p)|\phi\rangle\langle\phi| + p\sigma_z|\phi\rangle\langle\phi|\sigma_z^\dagger$  représentant le qubit bruité, et constituant une façon concise d'intégrer les statistiques conditionnelles induites par les différents états de l'ensemble statistique [3, 10]. Ainsi la probabilité de mesurer (projeter) le qubit bruité sur un état  $|\phi'\rangle$  est donnée par l'élément de matrice  $\langle\phi'|\rho|\phi'\rangle$ .

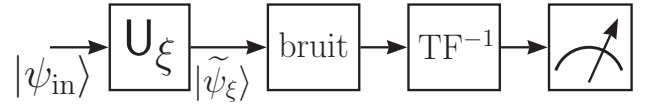


FIGURE 1 – Le signal d'entrée  $|\psi_{\text{in}}\rangle$  de l'Éq. (6) à  $N-1$  qubits intriqués excite le processus  $U_\xi$  de l'Éq. (3) dont on veut estimer la phase  $\xi$  à partir du signal de sortie  $|\tilde{\psi}_\xi\rangle$  de l'Éq. (7). Après possiblement l'action d'un bruit quantique sur  $|\tilde{\psi}_\xi\rangle$ , on réalise une TF inverse selon l'Éq. (8), puis on mesure chacun des  $N-1$  qubits dans la base  $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ .

Le bruit de phase-flip affecte l'état  $|\tilde{\psi}_\xi\rangle$  de l'Éq. (7) avant qu'il soit traité par TF inverse puis mesuré pour estimer  $\xi$ , selon le schéma de la Fig. 1. Dans l'Éq. (7), dans chacun des états de base  $|\bar{k}\rangle$  de l'Éq. (4) à  $N-1$  qubits, un état  $|0\rangle$  reste inchangé alors qu'un état  $|1\rangle$  est changé en  $-|1\rangle$  avec la probabilité  $p$ . Ainsi, par l'effet du bruit, chaque  $|\bar{k}\rangle$  peut devenir  $\pm|\bar{k}\rangle$  et reste dans  $\mathcal{H}'_N$ . Dans l'état  $|\bar{k}\rangle$ , parmi les  $k$  états  $|1\rangle$ , un nombre  $f \in [0, k]$  de flips survient avec la probabilité  $p_f = C_k^f p^f (1-p)^{k-f}$  de la loi binomiale. L'état  $|\bar{k}\rangle$  devient  $-|\bar{k}\rangle$  quand un nombre impair de flips survient parmi  $k$ , ce qui se produit avec la probabilité  $F(k)$  obtenue en sommant  $p_f$  sur les  $f$  impairs entre 1 et  $k$ . On notera  $1 - F(k) = \overline{F}(k)$ .

Dans l'Éq. (7), on écrit  $|\tilde{\psi}_\xi\rangle = \sum_{k=0}^{N-1} b_k |\bar{k}\rangle$  avec  $b_k = a_k \exp(i2\pi j_\xi k/N)$ . Dans la transformation  $|\bar{k}\rangle \mapsto \pm|\bar{k}\rangle$  par le bruit, seul l'état  $|\bar{0}\rangle$  n'est pas affecté, aussi  $|\tilde{\psi}_\xi\rangle$  se voit transformé en un ensemble statistique de  $2^{N-1}$  états de la forme  $\sum_{k=0}^{N-1} b'_k(\ell) |\bar{k}\rangle = |\psi'_\ell\rangle \in \mathcal{H}'_N$  affectés des probabilités  $P'_\ell$ , où les  $b'_k(\ell) = \pm b_k$  selon  $\ell = 1$  à  $2^{N-1}$ . Chaque  $\ell$  identifie une configuration de (changements de) signe possible sur  $|\tilde{\psi}_\xi\rangle$ . Par exemple, à partir de  $|\tilde{\psi}_\xi\rangle = b_0|\bar{0}\rangle + b_1|\bar{1}\rangle + \dots + b_{N-1}|\bar{N-1}\rangle$ , la configuration  $\ell = 1$  serait la configuration sans aucun changement de signe, quand  $|\tilde{\psi}_\xi\rangle$  reste  $|\tilde{\psi}_\xi\rangle = |\psi'_1\rangle$  et les  $b'_k(\ell = 1) = b_k$ , survenant avec la probabilité  $P'_{\ell=1} = \overline{F}(1)\overline{F}(2)\dots\overline{F}(N-1)$ ; la configuration  $\ell = 2$  serait une (parmi  $N-1$  faisables) configuration à un changement de signe, quand  $|\tilde{\psi}_\xi\rangle$  devient  $|\psi'_2\rangle = b_0|\bar{0}\rangle - b_1|\bar{1}\rangle + \dots + b_{N-1}|\bar{N-1}\rangle$ , et  $b'_1(\ell = 2) = -b_1$ , survenant avec la probabilité  $P'_{\ell=2} = F(1)\overline{F}(2)\dots\overline{F}(N-1)$ .

Dans la TF inverse, chaque  $|\psi'_\ell\rangle$  de l'ensemble statistique  $\{(|\psi'_\ell\rangle, P'_\ell)\}$  devient  $U_F^\dagger |\psi'_\ell\rangle = \sum_{j=0}^{N-1} c_j(\ell) |\bar{j}\rangle \in \mathcal{H}'_N$  avec



$$c_j(\ell) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N-1} b'_k(\ell) \exp\left(-i2\pi \frac{j k}{N}\right) = \text{TF}[b'_k(\ell)]. \quad (15)$$

Après la TF inverse, comme précédemment on mesure les  $N - 1$  qubits dans la base  $\{|k\rangle\}$  de  $\mathcal{H}'_N$ . La probabilité de projeter sur l'état  $|j\rangle$  est alors  $P_j = \sum_{\ell=1}^{2^{N-1}} |c_j(\ell)|^2 P'_\ell$ . On a alors accès, comme précédemment, pour l'estimateur  $\hat{\xi} = j/N$ , à l'erreur quadratique moyenne  $e^2(\hat{\xi}) = \langle (\hat{\xi} - \xi)^2 \rangle = \sum_{j=0}^{N-1} (\xi - j/N)^2 P_j$ .

Pour illustrer l'effet du bruit quantique sur la performance, la Fig. 2 représente l'évolution de l'erreur efficace d'estimation  $e(\hat{\xi})$ , à différents niveaux de bruit quantifiés par la probabilité  $p$  du bruit de phase-flip, et en fonction de la résolution  $N$  de l'estimation fixée par le nombre  $N - 1$  de qubits intriqués selon l'Éq. (13) dans le signal d'excitation  $|\psi_{\text{in}}\rangle$  en entrée.

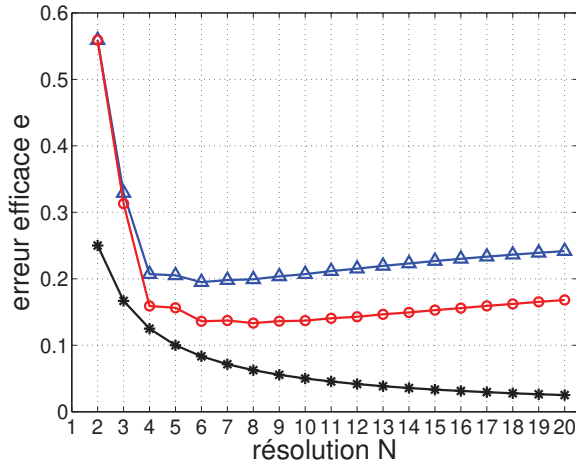


FIGURE 2 – Erreur efficace d'estimation  $e(\hat{\xi})$  en fonction de la résolution  $N$ . (\* noir) pour  $e(\hat{\xi}) = 1/(2N)$  représentant l'erreur sans bruit de la Section 4. Avec le bruit de la Section 5, au niveau  $p = 0.01$  (o rouge), et  $p = 0.03$  ( $\Delta$  bleu).

La Fig. 2 considère la phase à estimer  $\xi = 0.5 + 0.5/N$  afin de tester la condition sévère où  $N\xi = j_\xi$  peut être maximumment éloigné d'un entier  $j_0$ , bien que ce choix ne soit pas critique pour une évaluation de la performance d'estimation. Au delà de la possibilité d'une caractérisation quantitative de la performance d'estimation, en présence de bruit, la Fig. 2 montre une propriété importante du signal intriqué de taille  $N - 1$ , qui est qu'il existe une taille optimale de l'intrication ( $N$  entre 6 et 8 sur la Fig. 2). Ainsi, pour l'intrication, qui constitue une forme de corrélation quantique inaccessible en classique, la Fig. 2 révèle un comportement non trivial. Sans bruit, comme dans la Section 4, l'intrication est uniformément toujours bénéfique, et plus sa taille  $N$  augmente, plus l'erreur quadratique d'estimation se réduit, en  $1/N^2$  plutôt qu'en  $1/N$  classiquement. En présence de bruit toutefois, il existe un optimum de la taille  $N$  pour l'intrication ; au delà, qualitativement, la corrélation quantique entraîne la réponse trop dans la direction du bruit et nuit à la performance. Ce type d'optimum de l'intrication en présence de bruit est aussi observé dans [5, 11, 12] pour d'autres scénarios de métrologie ou d'estimation. Il révèle, dans le contexte du signal et de l'information quantiques, le comportement sophistiqué de l'intrication en présence de bruit, qui reste encore largement à explorer.

## 6 Conclusion

De nombreux aspects peuvent être approfondis pour la TF quantique en estimation de phase. On peut étudier d'autres fa-

çons d'exploiter l'intrication au delà du modèle de signal d'excitation  $|\psi_{\text{in}}\rangle$  de l'Éq. (6) qui en particulier permet un traitement analytique du bruit original ici. D'autres modèles de bruit quantique peuvent aussi être considérés, en présence d'intrication, notamment en recherchant comme ici les possibilités de traitement analytique. Plus largement, les développements autour de la TF quantique pour le traitement de l'information, progressent sur deux plans – algorithme et matériel. D'autres algorithmes peuvent être conçus exploitant la TF pour contribuer au traitement du signal quantique. Le calcul de la TF quantique basé sur l'Éq. (1) peut bien sûr être réalisé physiquement, au moyen de processeurs quantiques, selon différentes filières – électroniques ou optiques notamment – dont le développement, comme ceux des processeurs quantiques plus génériques, constituent aussi actuellement un front de recherche en plein essor des sciences et technologies de l'information.

## Références

- [1] F. Chapeau-Blondeau, “Détection quantique optimale sur un qubit bruité,” *Actes 25<sup>e</sup> Colloque GRETSI sur le Traitement du Signal et des Images*, Lyon, 8–11 sep. 2015.
- [2] N. Gillard, E. Belin, F. Chapeau-Blondeau, “Estimation quantique en présence de bruit améliorée par l'intrication,” *Actes 26<sup>e</sup> Colloque GRETSI sur le Traitement du Signal et des Images*, Juan-les-Pins, 5–8 sep. 2017.
- [3] M. A. Nielsen, I. L. Chuang, *Quantum Computation and Quantum Information*. Cambridge : Cambridge University Press, 2000.
- [4] Z. Ji, G. Wang, R. Duan, Y. Feng, M. Ying, “Parameter estimation of quantum channels,” *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 54, pp. 5172–5185, 2008.
- [5] S. F. Huelga, C. Macchiavello, T. Pellizzari, A. K. Ekert, M. B. Plenio, J. I. Cirac, “Improvement of frequency standards with quantum entanglement,” *Physical Review Letters*, vol. 79, pp. 3865–3868, 1997.
- [6] G. M. D'Ariano, P. Lo Presti, M. G. A. Paris, “Using entanglement improves the precision of quantum measurements,” *Physical Review Letters*, vol. 87, pp. 270404,1–4, 2001.
- [7] V. Giovannetti, S. Lloyd, L. Maccone, “Quantum-enhanced measurements : Beating the standard quantum limit,” *Science*, vol. 306, pp. 1330–1336, 2004.
- [8] F. Chapeau-Blondeau, “Entanglement-assisted quantum parameter estimation from a noisy qubit pair : A Fisher information analysis,” *Physics Letters A*, vol. 381, pp. 1369–1378, 2017.
- [9] R. Cleve, A. Ekert, C. Macchiavello, M. Mosca, “Quantum algorithms revisited,” *Proceedings of the Royal Society of London A*, vol. 454, pp. 339–354, 1998.
- [10] F. Chapeau-Blondeau, “Optimization of quantum states for signaling across an arbitrary qubit noise channel with minimum-error detection,” *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 61, pp. 4500–4510, 2015.
- [11] P. Kok, J. Dunningham, J. F. Ralph, “Role of entanglement in calibrating optical quantum gyroscopes,” *Physical Review A*, vol. 97, pp. 012326,1–10, 2017.
- [12] F. Chapeau-Blondeau, “Optimized entanglement for quantum parameter estimation from noisy qubits,” *International Journal of Quantum Information*, vol. 16, pp. 1850056,1–25, 2018. ■